

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JOÃO DO CARMO LOPES GONÇALVES

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA COM REFINO DE MALHA
ADAPTATIVO ISOTRÓPICO

CURITIBA

2016

JOÃO DO CARMO LOPES GONÇALVES

OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA COM REFINO DE MALHA
ADAPTATIVO ISOTRÓPICO

Tese apresentada como requisito para obter o título de Doutor em Engenharia Mecânica no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transportes e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Carlos Alberto Bavastri, *D.Sc.*
Coorientador: Prof. Jucélio Tomás Pereira, *D.Sc.*

CURITIBA

2016

G643o Gonçalves, João do Carmo Lopes
Otimização estrutural topológica com refino de malha adaptativo isotrópico
/ João do Carmo Lopes Gonçalves. – Curitiba, 2016.
125 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2016.

Orientador: Carlos Alberto Bavastri - Coorientador: Jucélio Tomás
Pereira.
Bibliografia: p. 116-125.

1. Otimização estrutural (Engenharia mecânica). 2. Método dos
elementos finitos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Bavastri, Carlos
Alberto III. Pereira, Jucélio Tomás. IV. Título.

CDD: 620.1

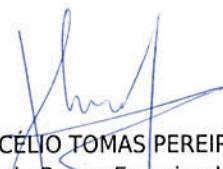


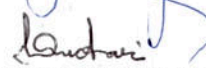
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor TECNOLOGIA
Programa de Pós Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA
Código CAPES: 40001016040P5

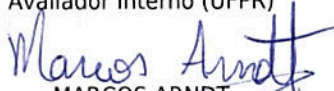
TERMO DE APROVAÇÃO

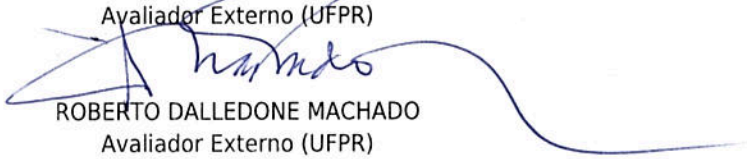
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Tese de Doutorado de **JOAO DO CARMO LOPES GONCALVES**, intitulada: "**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA COM REFINO DE MALHA ADAPTATIVO ISOTRÓPICO**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 01 de Setembro de 2016.


JUCÉLIO TOMAS PEREIRA
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)


LUCIANO KIYOSHI ARAKI
Avaliador Interno (UFPR)


MARCOS ARNDT
Avaliador Externo (UFPR)


ROBERTO DALLEDONE MACHADO
Avaliador Externo (UFPR)


VIVIANA COCCO MARIANI
Avaliador Externo (PUC/PR)

Dedico esta tese
primeiro a Deus,
a minha esposa (Rosana),
a meus filhos (Douglas, Marília e Pablo Felipe),
a meu neto (João Leopoldo),
a meus pais (*in memoriam*) (Sebastião e Antonia),
à Amanda (filha/nora), ao Samuel (filho/genro) e
a meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, porque é a fonte onde busco segurança e Ele tem suprido todas as minhas necessidades.

À minha família, que representa bem o equilíbrio da balança, enquanto a vergonha de desistir foi maior que a força para continuar. A minha esposa e filhos pela compreensão dos momentos de ausência e aos pais e irmãos, pela transmissão dos valores de caráter.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira, pelas orientações, pelo exemplo de profissionalismo, pela frase “*precisamos trabalhar mais*” nos momentos de indecisão e pela amizade e apoio no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Instituto Federal do Paraná, pela confiança e sustento financeiro ao longo desta trajetória.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PGMEC) por possibilitar as condições necessárias para a qualificação das pessoas nesta região.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Aos meus colegas e a todo o grupo do Laboratório de Vibrações e Mecânica dos Sólidos Computacional da UFPR, em especial a Jéderson da Silva nas discussões/sugestões importantes para o trabalho.

Aos Professores Dr. Carlos Alberto Bavastri e Dr. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes pelos diversos ensinamentos e colaborações prestadas.

Ao secretário, Márcio Tenório, por estar sempre pronto a ajudar nas questões burocráticas.

E finalmente, não por ordem de importância, mas pela lógica do desenvolvimento do trabalho, aos participantes da banca de defesa, que deram uma parte importante de suas vidas, o “seu tempo” para leitura e apontamentos necessários para este trabalho.

Se Deus não existe, nada se perde por se acreditar nele; mas, se existe, perde-se tudo por não se acreditar.

Blaise Pascal

RESUMO

Em geral, as abordagens empregadas para solução de problemas de otimização estrutural topológica contínua (OETC) apresentam como resultado uma topologia em que, no contorno do material, ocorre uma variação significativa das densidades. Nessas regiões, é difícil determinar o contorno exato do material e um refino da malha contribui para a redução desse problema, resultando em uma definição mais clara do contorno do material. Essa questão pode ser vista como um problema de distribuição de material, e o resultado final desse processo é se existe ou não existe material nos elementos do domínio, influenciando diretamente na variação das propriedades mecânicas do material. Para um refino de malha adaptativo, a estimativa de erro de aproximação é necessária para guiar todo o processo. Neste trabalho é proposta uma metodologia considerando o uso combinado de técnicas de otimização estrutural e refinamento de malha tipo adaptativo h-isotrópico. Aqui as estimativas dos erros *a posteriori* baseiam-se na recuperação das derivadas e na norma em energia. É utilizado o estimador de erro Zienkiewicz e Zhu e, como medida da qualidade do estimador, usa-se o conceito de índice de efetividade. Na geração da nova malha o critério de malha ótima é de equidistribuição do erro elementar. As principais contribuições deste trabalho são: i) a proposta de uma nova metodologia de projeto de malha adaptativa h-isotrópica e ii) aplicação da metodologia proposta em problemas bidimensionais, de otimização estrutural em topologia contínua. Nos exemplos numéricos é realizada uma análise comparativa entre a abordagem clássica de projeto de malha Ch^P , segundo Zienkiewicz e Zhu (1987), e a projeção de malha por recuperação quadrática da densidade do erro elementar (QER), que é a proposta neste trabalho. Os resultados evidenciam a eficiência da metodologia que combina OETC/adaptatividade tanto na definição mais clara do contorno do componente quanto na redução dos erros.

Palavras-chave: Otimização estrutural topológica contínua. Método dos Elementos Finitos. Adaptatividade. Refino de malha isotrópico.

ABSTRACT

Generally, the approach used to solving continuous topological structural optimization problems (OETC) results in a topology which in the edges of the material occur significant density changes. In these regions it is difficult to determine the exact contour of the material in refining the mesh contributes to the reduction of the problem, resulting in a clearer definition of the boundary of the material. This question can be understood as a problem of material distribution, and the result of this process is if exists material in the elements of the domain, generating a variation in mechanical properties. For a mesh refinement, the approximation error estimation is necessary to guide the entire adaptive process. In the current work proposes a methodology considering the combined use of structural optimization techniques and mesh refinement of the h-adaptive isotropic type. In this, the *a posteriori* error estimations are based in the recovery of the derivative and in the norm in energy. It is used the Zienkiewicz and Zhu error estimator and to measure the estimator quality is utilized the concept of effectiveness index. In new mesh generation, the optimum mesh criteria is of equidistribution elementary error. The main contributions of this work are: i) the proposal of a new mesh project methodology in adaptive finite element h-isotropic and ii) application of the proposed methodology in two dimensional structural topology optimization problems. In the numerical examples is performed a comparative analysis between the classical approach of mesh ChP project, according (Zienkiewicz and Zhu, 1987) and the mesh projection by quadratic recovery of elemental error density (QER), that is the purpose of this work. The results show the effectiveness of the methodology that combines OETC/adaptivity both clearer definition of component contour as in reducing errors.

Keywords: Continuous topological structural optimization. Finite element method. Adaptivity. Isotropic mesh refinement

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - EXEMPLOS DE MALHA ISOTRÓPICA (a) E MALHA ANISOTRÓPICA (b).....	19
FIGURA 2 - TIPOS BÁSICOS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL: DIMENSIONAL (a), DE FORMA (b) E DE TOPOLOGIA (c)	24
FIGURA 3 - EXEMPLO DE MALHA DE ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO Ω E NOS SUBDOMÍNIOS Ω_e	44
FIGURA 4 - PONTOS SUPERCONVERGENTES INTERNOS EM CADA ELEMENTO, NO PADRÃO DO NÓ - CST	56
FIGURA 5 - COORDENADAS RELATIVAS \mathbf{x} DE UM PONTO QUALQUER NO INTERIOR DE UM ELEMENTO FINITO	64
FIGURA 6 - CIRCUNFERÊNCIA ÓTIMA COM ÁREA LIMITADA PELA RECUPERAÇÃO QUADRÁTICA DA DENSIDADE DO ERRO.....	67
FIGURA 7 - DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS DE UM DOMÍNIO COMPOSTO POR SÓLIDOS E FUROS	71
FIGURA 8 - ELEMENTO CST: (a) CAMPO DOS DESLOCAMENTOS, (b) CAMPO DA DENSIDADE RELATIVA	80
FIGURA 9 - REPRESENTAÇÃO DO PADRÃO DE ELEMENTOS (<i>PATCH</i>) ASSOCIADO AO I-ÉSIMO NÓ.....	82
FIGURA 10 - FLUXOGRAMA DO PROCESSO ITERATIVO	88
FIGURA 11 - PROBLEMA E1: SOLUÇÃO ANALÍTICA	90
FIGURA 12 - PROBLEMA E1:– MALHA FINAL (a) E ERRO RELATIVO (b) NA 5ª ITERAÇÃO DO PROJETO DE MALHA VIA Ch^P	91
FIGURA 13 - PROBLEMA E1: MALHA FINAL (a) E ERRO RELATIVO (b) NA 5ª ITERAÇÃO DO PROJETO DE MALHA VIA QER	91
FIGURA 14 - PROBLEMA E1: COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO ESTIMADO E O ERRO VERDADEIRO (a), COMPARAÇÃO ENTRE O ÍNDICE DE EFETIVIDADE E A REFERÊNCIA DE EFETIVIDADE (b) NA 5ª ITERAÇÃO DO PROJETO DE MALHA VIA Ch^P	92
FIGURA 15 - PROBLEMA E1: COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO ESTIMADO E O ERRO VERDADEIRO (a), COMPARAÇÃO ENTRE O ÍNDICE DE EFETIVIDADE E A REFERÊNCIA DE EFETIVIDADE (b) NA 5ª ITERAÇÃO DO PROJETO DE MALHA VIA QER.....	92

FIGURA 16 - PROBLEMA E1: COMPARAÇÃO ENTRE A PROJEÇÃO Ch^P E A PROJEÇÃO QER.....	93
FIGURA 17 - PROBLEMA E2: SOLUÇÃO ANALÍTICA	94
FIGURA 18 - PROBLEMA E2: MALHA FINAL (a) ERRO RELATIVO (b) NA 5ª ITERAÇÃO DO PROJETO DE MALHA VIA Ch^P	95
FIGURA 19 - PROBLEMA E2: MALHA FINAL (a) ERRO RELATIVO (b) NA 5ª ITERAÇÃO DO PROJETO DE MALHA VIA QER	95
FIGURA 20 - PROBLEMA E2: COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO ESTIMADO E O ERRO VERDADEIRO (a), COMPARAÇÃO ENTRE O ÍNDICE DE EFETIVIDADE E A REFERÊNCIA DE EFETIVIDADE (b) PROJETO DE MALHA VIA Ch^P	96
FIGURA 21 - PROBLEMA E2: COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO ESTIMADO E O ERRO VERDADEIRO (a), COMPARAÇÃO ENTRE O ÍNDICE DE EFETIVIDADE E A REFERÊNCIA DE EFETIVIDADE (b) PROJETO DE MALHA VIA QER	96
FIGURA 22 - PROBLEMA E2: COMPARAÇÃO ENTRE A PROJEÇÃO Ch^P E A PROJEÇÃO QER.....	97
FIGURA 23 - PROBLEMA V1: Ch^P (a) e QER (b) PROJEÇÃO DA MALHA FINAL..	98
FIGURA 24 - PROBLEMA V1: COMPARAÇÃO ENTRE A PROJEÇÃO Ch^P E A PROJEÇÃO QER.....	99
FIGURA 25 - PROBLEMA V2: Ch^P , (a) e QER (b) PROJEÇÃO DA MALHA FINAL	100
FIGURA 26 - PROBLEMA V2: COMPARAÇÃO ENTRE A PROJEÇÃO Ch^P E A PROJEÇÃO QER.....	100
FIGURA 27 - VIGA LONGA BI APOIADA COM CARREGAMENTO TRANSVERSAL CENTRAL.....	101
FIGURA 28 - VIGA MBB: MALHA INICIAL (a) E MALHA FINAL ADAPTADA (b)...	102
FIGURA 29 - VIGA MBB: CAMPO DAS DENSIDADES FINAL PLANIFICADA (a) E EM 3D (b)	102
FIGURA 30 - VIGA MBB: MALHA FINAL DA PROJEÇÃO DE MALHA VIA Ch^P (a) COMPARAÇÃO ENTRE PROJEÇÕES (b)	103
FIGURA 31 - VIGA MBB: ERRO RELATIVO ELEMENTAR (a) E TAXA DE CONVERGÊNCIA (b).....	104
FIGURA 32 - PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO NO CENTRO	105

FIGURA 33 - PLACA FURO: MALHA INICIAL (a) E MALHA FINAL ISOTRÓPICA (b)	105
FIGURA 34 - PLACA FURO: CAMPO DAS DENSIDADES FINAL – PLANIFICADA (a) E EM 3D (b)	106
FIGURA 35 - PLACA FURO: MALHA FINAL DA PROJEÇÃO DE MALHA VIA Ch^P (a) E COMPARAÇÃO ENTRE PROJEÇÕES (b)	106
FIGURA 36 - ESTRUTURA EM FORMATO DE L ENGASTADA NA PARTE SUPERIOR	108
FIGURA 37 - ESTRUTURA L: MALHA INICIAL (a) E MALHA FINAL ISOTRÓPICA (b)	109
FIGURA 38 - ESTRUTURA L: CAMPO DAS DENSIDADES FINAIS - PLANIFICADA (a) E EM 3D (b)	109
FIGURA 39 - ESTRUTURA L: MALHA FINAL DA PROJEÇÃO DE MALHA VIA Ch^P , (a) E COMPARAÇÃO ENTRE PROJEÇÕES (b)	110
FIGURA 40 - ESTRUTURA L: ERRO RELATIVO ELEMENTAR (a) TAXA DE CONVERGÊNCIA (b)	112

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - VIGA MBB: INFORMAÇÃO DE CADA ITERAÇÃO NO PROCESSO ADAPTATIVO.....	104
TABELA 2 - PLACA FURO:INFORMAÇÃO DE CADA ITERAÇÃO NO PROCESSO ADAPTATIVO.....	108
TABELA 3 - ESTRUTURA L: INFORMAÇÃO DE CADA ITERAÇÃO NO PROCESSO ADAPTATIVO.....	110

LISTA DE SIGLAS

BAMG	Gerador de malha bidimensional anisotrópico (<i>Bidimensional Anisotropic Mesh Generator</i>)
BESO	Otimização estrutural evolucionária bidirecional (<i>Bidirectional Evolutionary Structural Optimization</i>)
CST	Elemento triangular de deformação constante (<i>constant strain triangle</i>)
EDP	Equações diferenciais parciais
EPT	Estado plano de tensões
ESO	Otimização estrutural evolucionária (<i>Evolutionary Structural Optimization</i>)
MATLAB	Software comercial (Matrix Laboratory)
MDF	Método de Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MESH2D	Gerador de malha não estruturada triangular 2D
OE	Otimização estrutural
OET	Otimização estrutural topológica
OETC	Otimização estrutural topológica contínua
QER	Projeção tamanho elementar via recuperação quadrática da densidade do erro em energia (<i>Quadratic Elementary Recovery</i>)
RCP	Estimador de erro de recuperação por compatibilidade em padrões (<i>Recovery by Compatibility in Patches</i>)
SIMP	Microestrutura sólida isotrópica com penalização (<i>Solid Isotropic Microstructure with Penalization</i>)
SPR	Estimador de erro superconvergente por recuperação em padrões (<i>Superconvergence Patch Recovery</i>)
ZZ	Estimador de erro segundo Zienkiewicz e Zhu

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos latinos

$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v})$	forma variacional do problema de valores no contorno
e^*	erro baseado em recuperação
e_{lim}	erro limite (erro admissível)
e_u	erro no campo dos deslocamentos
e_ε	erro no campo das deformações
e_σ	erro no campo das tensões
D	tensor constitutivo do material
E	módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young) do material (MPa)
f_x	carregamento aplicado na direção x
f_y	carregamento aplicado na direção y
$F(\rho)$	funcional qualquer de domínio que depende do campo de densidades
$F_G(\cdot)[\delta\rho]$	derivada direcional segundo Gateaux do funcional $F(\cdot)$ na direção $\delta\rho$
H	matriz Hessiana
N_p	número de elementos conectados a um nó qualquer
P	força peso na estrutura (kN)
r_ρ	fator de penalização da função regularizadora (m^2)
$R_h \mathbf{u}_h$	função recuperada a partir da aproximação de $\mathbf{u}(x)$
r^k	fator de penalização quadrático no subproblema k
r_m	fator de penalização das densidades intermediárias
t	força tração (N)
U	espaço de funções de deslocamentos cinematicamente admissíveis
\mathbf{u}	solução analítica do problema
\mathbf{u}_a	deslocamentos adjuntos
\mathbf{u}_h	solução aproximada do problema
$u_h(P)$	solução aproximada avaliada no ponto P
V	espaço de funções de variações cinematicamente admissíveis
\mathbf{x}	vetor de variáveis de projeto

Símbolos gregos

$\delta\rho(x)$	função variação qualquer no campo de densidades
ζ	razão entre erro elementar e erro limite
η	erro relativo percentual
θ	índice de efetividade
λ^k	multiplicador de Lagrange
π_1x	aproximação linear no MEF
$\pi_2(x,y)$	aproximação quadrática em mínimos quadrados
$\rho(x)$	campo de densidades
σ^*	vetor de tensões recuperadas
$\sigma(\mathbf{u})$	vetor de tensões
Ω	domínio físico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	18
1.1	OBJETIVOS	20
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	21
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	22
2.1	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	22
2.1.1	Variáveis de projeto	22
2.1.2	Técnicas de Otimização Estrutural	24
2.2	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA.....	25
2.2.1	Dificuldades na aplicação do método	25
2.3	REFINO DE MALHA ADAPTATIVO	26
2.4	ESTIMADORES DE ERRO	28
2.5	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DE TOPOLOGIA CONTÍNUA.....	31
2.5.1	Técnicas acopladas de otimização topológica e refinamentos de malha...33	
2.6	PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO.....	34
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	36
3.1	OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA.....	36
3.1.1	Otimização não linear	37
3.2	OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA CONTÍNUA	39
3.3	MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	42
3.3.1	Alguns fundamentos matemáticos do MEF.....	43
3.4	O ERRO EM ELEMENTOS FINITOS.....	46
3.4.1	Definições de erros	47
3.4.2	Estimativas do erro <i>a posteriori</i>	49
3.4.3	Estimativa do erro <i>a posteriori</i> baseado em recuperação.....	51
3.4.4	Recuperação do Gradiente	52
3.4.4.1	Estimador de erro baseado no Método da Média Nodal ...53	
3.4.4.2	Estimador de erro Zienkiewicz e Zhu	54
3.4.4.3	Estimador de erro <i>Superconvergent Patch Recovery</i>	55
3.5	REFINAMENTO ADAPTATIVO EM ELEMENTOS FINITOS	58
3.5.1	Tamanho h adaptativo isotrópico	59
3.6	GERADOR DE MALHA	61
4	PROPOSTAS DE MALHA H-ISOTRÓPICA	63

4.1	RECUPERAÇÃO QUADRÁTICA DA DENSIDADE DO ERRO	63
4.1.1	Obtenção da matriz dos coeficientes	65
4.1.2	Recuperação quadrática da densidade do erro	65
4.2	PROJETO DO TAMANHO DO NOVO ELEMENTO ISOTRÓPICO	67
5	PROBLEMA PROPOSTO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA	71
5.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA.....	71
5.1.1	Problema de Otimização.....	73
5.1.2	Técnicas para relaxação do problema	74
5.1.3	Técnicas para restrição do problema	76
5.2	MÉTODO DO LAGRANGEANO AUMENTADO	77
5.2.1	Atualização do multiplicador de Lagrange e do fator de penalização	78
5.3	ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	79
6	RESULTADOS NUMÉRICOS.....	86
6.1	INTRODUÇÃO	86
6.2	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	86
6.3	RESULTADOS	89
6.3.1	Validação da técnica de refino em problemas escalares	89
6.3.2	Validação em problemas vetoriais	97
6.3.3	Resultados com mínima flexibilidade com restrição em massa	101
6.3.3.1	Viga MBB	101
6.3.3.2	Placa retangular com furo quadrado	105
6.3.3.3	Estrutura em formato L.....	108
7	CONCLUSÕES.....	113
7.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	113
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	114
	REFERÊNCIAS.....	116

1 INTRODUÇÃO

A competitividade tecnológica obriga as empresas a fornecerem produtos com maior eficiência e menor custo. Isso influencia de forma significativa em projetos mais confiáveis e, às vezes, na economia de materiais. Geralmente, para a engenharia estrutural, essa situação implica em escolher o melhor projeto comparado com todos os projetos possíveis. Aí é fundamental a aplicação do conhecimento empírico e intuitivo. Além disso, a aplicação de um conjunto organizado e sistematizado de conhecimentos científicos é importante para o avanço e desenvolvimento dessa área. Nesse sentido, existe a necessidade de aliar ferramentas computacionais integradas com ferramentas matemáticas que propiciem aumento na confiança e velocidade nos cálculos no processo. Fatores importantes, como a melhoria na área da computação e o fortalecimento de vários métodos numéricos, colaboram com o desenvolvimento das pesquisas científicas em todas as áreas do conhecimento, particularmente na engenharia.

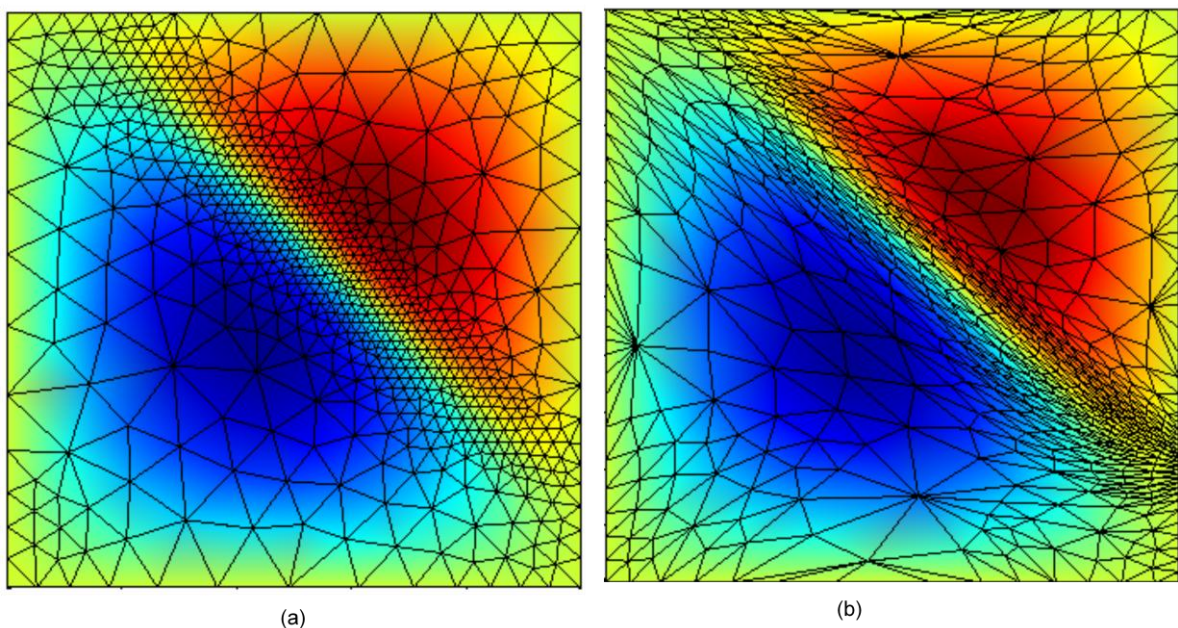
Muitos fenômenos físicos possuem comportamentos que podem ser descritos através de equações matemáticas. Geralmente, esses modelos resultam em equações diferenciais ou equações integrais, definidas em um domínio de interesse. De maneira bem específica, um método numérico bastante comum e confiável para solução de problemas de engenharia é o Método de Elementos Finitos (MEF), o qual subdivide o domínio do problema em partes menores, sendo definidos os elementos finitos. Para a engenharia estrutural, esta solução, mesmo sendo aproximada, fornece informações importantes de como ocorrem os deslocamentos nessa estrutura. Com essas informações podem-se obter outras informações importantes de toda a estrutura como as deformações e as tensões envolvidas no problema. A união do MEF com as técnicas de otimização tem contribuído na resolução de vários problemas, inclusive estruturais.

Em relação à Otimização Estrutural Topológica Contínua (OETC), a solução de um problema de projeto ótimo é estabelecida como sendo processo iterativo, que objetiva encontrar uma estrutura contínua, entre todas as topologias possíveis, a melhor (solução ótima), obedecendo algumas limitações pré-estabelecidas (restrições). Ou seja, a OETC é uma grande área de pesquisas, que se faz necessária na fase conceitual do projeto.

A união dessas abordagens numéricas (MEF e OETC) resulta em uma sequência iterativa que converge para um ponto no domínio de análise, definido como solução aproximada. Essa solução contém erros, os quais dependem de vários fatores. Na literatura, são encontradas várias pesquisas na tentativa de controlar e atenuar esses erros, cuja origem pode ser na aplicação dos métodos, na capacidade das máquinas ou na pessoa que vai executar o processo. Especificamente, no método numérico MEF, que depende de uma malha para sua aplicação, existem algumas abordagens que buscam mitigar o erro. O refino é um exemplo e pode ser feito da seguinte maneira: refazer toda a malha refinando os elementos (refino h), aumentar o grau do polinômio interpolador nos elementos (refino p), mudar as coordenadas dos nós (refino r) ou ainda a junção destes três tipos.

Geralmente, o refino de malha do tipo h aumenta a quantidade de variáveis envolvidas, portanto, é necessário que o refino da malha seja orientado por um estimador do erro confiável. Assim, os elementos situados em regiões onde ocorrem erros elevados devem apresentar menores dimensões e elementos onde os erros são menores as dimensões dos elementos podem ser maiores, isto é, deve-se refinar a malha até que encontre a malha que melhor se adapte à solução do problema.

FIGURA 1 – EXEMPLOS DE MALHA ISOTRÓPICA (a) E MALHA ANISOTRÓPICA (b)



Na literatura, existem vários trabalhos que tratam desse assunto, onde o mais comum é uma abordagem do tipo refino de malha do tipo h -isotrópico, que também é usado neste trabalho. Ou seja, para o caso de uma malha triangular, os novos elementos muito se assemelham a triângulos equiláteros. Por outro lado, é comum a ocorrência de problemas cujas soluções variam pouco em algumas direções e muito em outras. Essas soluções são denominadas soluções anisotrópicas (FIGURA 1). Neste caso, um refino ideal se dá pela geração de elementos mais esticados dependendo das direções principais de variação da solução (KUNERT; NICAISE, 2003). Soluções anisotrópicas aparecem em problemas de engenharia e são mais evidentes em situações como a ocorrência de ondas de choque, singularidades, interfaces entre bordas que se deslocam, simulação do clima, entre outros (COUPEZ; HACHEM, 2011, HUANG; KAMENSKI; LANG, 2012).

Este trabalho propõe uma nova metodologia de refino de malha adaptativa do tipo h -isotrópico, baseada em uma recuperação quadrática da densidade do erro e, posteriormente, aplicando-a em problemas de otimização estrutural topológica contínua bidimensional, combinando as técnicas de elementos finitos e otimização estrutural. A seguir apresentam-se os objetivos e a organização para este trabalho.

1.1 OBJETIVOS

Como visto na seção anterior, existem vários trabalhos envolvendo o tema refino adaptativo isotrópico; o que se propõe é uma metodologia de refino de malha para aplicação do método de elementos finitos, envolvendo uma abordagem adaptativa do tipo h -isotrópico. Nesse sentido, o objetivo geral deste trabalho é combinar técnicas de otimização estrutural em topologia contínua e de refino adaptativo h -isotrópico. A proposta de desenvolver uma metodologia eficiente de refino de malha e aplicá-la em um problema de otimização estrutural em topologia contínua com domínio bidimensional é o que norteia este trabalho.

O objetivo geral delineado pode ser especificado como:

1. Propor uma metodologia de projeto ótimo de malha h -isotrópica adaptativa considerando a recuperação quadrática do erro;

2. Desenvolver uma metodologia de otimização topológica estrutural contínua com controle de erro via refino adaptativo h-isotrópico em elementos finitos;
3. Implementar computacionalmente as metodologias apresentadas e
4. Validar as metodologias através da comparação com casos clássicos encontrados na literatura.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O presente trabalho é dividido da seguinte maneira:

Neste capítulo é apresentada uma introdução do trabalho, para caracterizar o tema central do mesmo, destacando sua importância e relevância.

No segundo capítulo, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre os principais temas que envolvem este trabalho. Também, são apresentados os objetivos gerais, específicos e as principais contribuições do trabalho.

No terceiro capítulo, apresenta-se uma fundamentação teórica envolvendo os temas do trabalho bem como os conceitos e técnicas utilizados.

No quarto capítulo, é apresentada uma metodologia de refino de malha do tipo h-isotrópica, a qual projeta a nova malha considerando o conceito de recuperação quadrática do erro no gradiente.

No quinto capítulo, discute-se o problema de otimização estrutural em topologia contínua no qual a metodologia é aplicada.

No sexto capítulo, são apresentados os resultados numéricos obtidos.

Finalmente, no sétimo capítulo, são expostas as considerações finais a partir dos resultados obtidos, bem como sugestões para futuros trabalhos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Entre os vários tipos de sistemas de engenharia, os sistemas estruturais desempenham um papel fundamental na engenharia moderna. Sua principal função é receber os carregamentos externos, absorvê-los internamente e transmiti-los aos seus apoios. Além disso, existe o desafio de que os sistemas gerados devem ser seguros e economicamente viáveis, justificando a importância das pesquisas nesta área. Para Wang, Kang e He (2014), nas duas últimas décadas muitos métodos de otimização de topologia estrutural têm sido desenvolvidos, incluindo os métodos de homogeneização (BENDSØE; KIKUCHI, 1988), a microestrutura fictícia, *Solid Isotropic Microstructure with Penalization* (SIMP) (BENDSØE; SIGMUND 1999), o método baseado em gradiente topológico (SOKOLOWSKI; ZOCHOWSKI, 1999), o método *level set* (WANG; WANG; GUO, 2003), o método *Evolutionary Structural Optimization* (ESO) (XIE; STEVEN, 1996).

A seguir é apresentada uma revisão bibliográfica sobre os temas discutidos neste trabalho. Os temas principais da revisão são a otimização estrutural topológica contínua e o refino de malha adaptativo. Neste caso, lança-se um olhar sobre os trabalhos que envolvem esses temas, alguns conceitos, abordagens e suas características. No final do capítulo é exposta uma visão sobre o estado da arte do tema principal, bem como os objetivos e as contribuições deste trabalho.

2.1 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Otimização estrutural (OE) é um conjunto de técnicas que podem ser aplicadas para resolver vários tipos de problemas de otimização em topologia. De maneira geral, essas técnicas objetivam encontrar a melhor distribuição de material em uma região do espaço pré-determinada, respeitando-se certos critérios do projeto. No problema de otimização de topologia, a distribuição de material no domínio é modificada considerando as alterações no comportamento mecânico da estrutura, como exemplo: massa, flexibilidade, frequências naturais, tensões, entre outros (LINS, 2009; ARORA, 2012; BENDSOE; SIGMUND, 2003).

2.1.1 Variáveis de projeto

Em otimização estrutural, as variáveis de projeto são os parâmetros do problema, que podem ser modificados de modo a obter a configuração ótima do sistema. Em um processo de otimização geral, podem ser tratadas diferentes tipos de variáveis de projeto que podem ser agrupadas em variáveis discretas e variáveis contínuas.

No caso de otimização estrutural, as variáveis de projeto discretas são grandezas que assumem valores pré-definidos. Tipicamente são valores dentro de um conjunto discreto possível de escolha. Segundo, Arora (2007) a escolha de variáveis discretas ocorre naturalmente, no início da formulação do problema. Isso acontece em várias aplicações práticas de otimização, tais como:

- A espessura de uma chapa que deve ser selecionada a partir das dimensões disponíveis;
- As propriedades dos materiais que devem corresponder aos materiais disponíveis;
- Os elementos estruturais que devem ser selecionados a partir de um catálogo;
- A quantidade de armadura em uma base de concreto deve ser um número inteiro;
- O diâmetro das hastes deve ser selecionado segundo os tamanhos disponíveis;
- A quantidade de parafusos deve ser um número inteiro, entre outros.

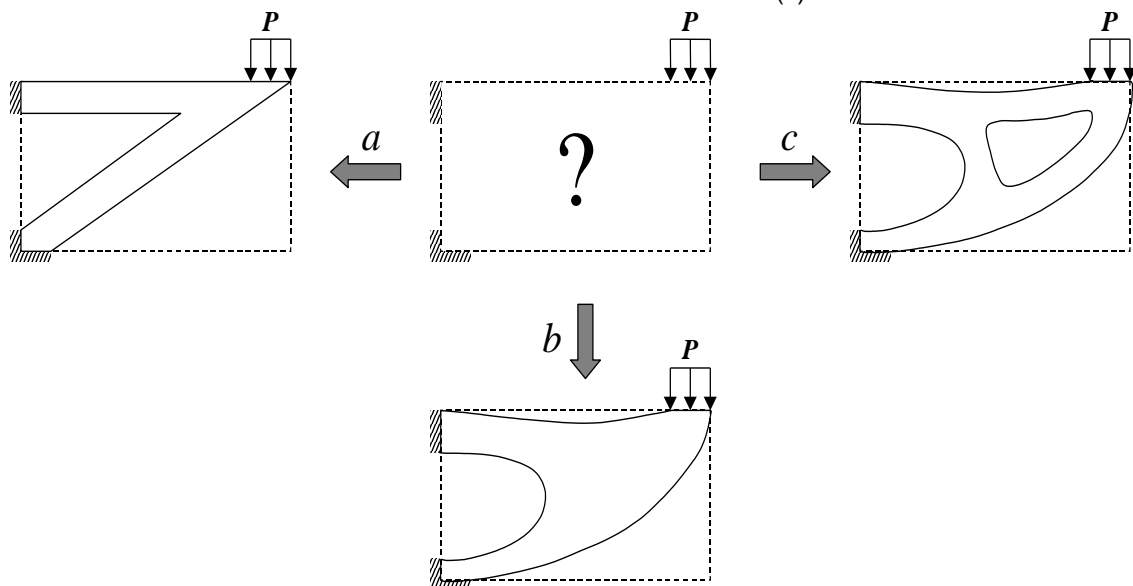
Para resolver problemas que envolvem variáveis discretas, geralmente são utilizados métodos que abordam programação inteira e/ou otimização combinatória, via de regra, resultando em algoritmos complexos e problemas de difícil solução (SILVA, 2007).

As variáveis de projeto contínuas podem variar continuamente dentro do intervalo do domínio. Embora sejam contínuas, essas variáveis podem ser definidas através de parâmetros distribuídos ou parâmetros discretos. No caso de distribuídos, as variáveis de projeto são representadas por uma função, cuja solução é, em geral, obtida através do cálculo variacional. Variáveis contínuas de parâmetro discreto são representadas através de valores escalares que podem variar dentro do conjunto viável contínuo (ARORA, 2007).

2.1.2 Técnicas de Otimização Estrutural

As técnicas de solução de problemas de OE podem ser agrupadas basicamente em três classes: otimização dimensional ou paramétrica, otimização de forma e otimização topológica (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

FIGURA 2 - TIPOS BÁSICOS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL: DIMENSIONAL (a), DE FORMA (b) E DE TOPOLOGIA (c)



FONTE: PEREIRA (2001)

Otimização paramétrica (*size optimization*) utiliza como variáveis de projeto parâmetros que representam as dimensões ou razões de dimensões do sistema estrutural. Neste tipo, parte-se de uma configuração pré-definida e são obtidos os valores ótimos das dimensões, não havendo alteração da forma nem da topologia, apenas na razão de aspecto dos membros da estrutura.

Em otimização de forma (*shape optimization*) é permitido alterar os contornos internos e externos da estrutura. Em geral, a superfície que caracteriza o contorno é parametrizada através de funções dos tipos polinomiais ou *B-splines*.

Otimização de topologia estrutural (*topology optimization*) visa definir a melhor forma de distribuir o material em um domínio pré-estabelecido. Além de reduzir as dimensões e alterar os contornos, é possível remover material criando furos na estrutura. Portanto, há uma alteração na conectividade dos elementos do sistema. Essa é a abordagem discutida neste trabalho e, portanto, é apresentada com mais detalhes a seguir.

2.2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA

Na abordagem de otimização estrutural topológica, busca-se uma solução ótima da distribuição de material para a estrutura, através da variação da topologia e do contorno da mesma. Em estruturas discretas (por exemplo, as treliças e pórticos) a topologia é descrita pelo número de barras, posições dos vínculos entre elas, suas conectividades e suas propriedades geométricas. No caso de estruturas contínuas, o objetivo é determinar a existência ou não de material em cada ponto do domínio.

2.2.1 Dificuldades na aplicação do método

Como posto por Oliveira Neto (2011), a distribuição ótima de material consiste em determinar quais regiões do domínio possuem material e quais estão vazias. Dessa maneira, o problema de otimização topológica é, na essência, um problema com variáveis discretas e pode ser considerado como um problema pontual do tipo existe/não existe material. Ou seja, um problema de otimização do tipo 0-1 para cuja solução seria necessário resolver um problema combinatório com infinitas operações, no caso de estruturas com domínio contínuo. A solução desse problema requer o uso de algoritmos de otimização, o que, em geral, recai em problemas de instabilidade numérica. Essa dificuldade é intrínseca ao problema e está relacionada à aplicação do método como dependência de malha, instabilidade do tipo tabuleiro de xadrez e ocorrência de mínimos locais (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

O problema de dependência de malha está relacionado ao processo de discretização do domínio, o qual pode ser caracterizado como erro das informações que são ajustadas ao problema, pois a solução da equação diferencial é obtida em um domínio modificado. O esperado é que a cada refino de malha, o erro da solução encontrada vá diminuindo. No entanto, para alguns problemas, à medida que se refina a malha, podem ser produzidas estruturas mais complexas, com maiores detalhes na topologia e qualitativamente diferentes em comparação com as malhas mais grosseiras do mesmo domínio. Esse é um problema mal posto para o qual não existe solução (GUO; ZHANG; ZHONG, 2014).

Os problemas de instabilidade do tipo tabuleiro de xadrez (*checkerboard*) são caracterizados por uma alternância entre elementos cheios (1) e elementos

vazios (0), formando uma configuração similar a um tabuleiro de xadrez. Essas formações de padrões de xadrez ocorrem em problemas de otimização topológica de estruturas contínuas. Segundo Bendsoe (1995), a configuração em xadrez é intrínseca ao problema. A instabilidade fica evidenciada quando da utilização de funções de interpolação de ordem baixa.

Os problemas de mínimos locais estão relacionados ao fato de que, em geral, os problemas de topologia não são convexos. Para controlar essa característica, a saída seria gerar várias possibilidades no mesmo problema, com diferentes pontos de partida (ponto inicial).

2.3 REFINO DE MALHA ADAPTATIVO

Uma forma de melhorar a qualidade da solução obtida pelo MEF é refinar a malha e, se possível, que o refino seja automático. Essa técnica aparece na literatura e é denominada de refino adaptativo. Dada uma malha inicial e a solução do problema associada à mesma, a adaptatividade do tipo h em elementos finitos consiste, geralmente, em três etapas:

1. A estimativa de erro nas várias regiões do domínio;
2. Projeto da nova malha obtendo os novos parâmetros h para sua caracterização;
3. Refino propriamente dito com a geração da nova malha.

Na literatura existem duas estratégias básicas de refino, o refino p e o refino h (ZHU; ZIENKIEWICZ, 1988):

- Refinamento p : consiste em melhorar o espaço das soluções aumentando o grau p do polinômio interpolador.
- Refinamento h : nesse método os elementos originais da discretização geram elementos menores (dimensão h), mantendo constante o grau dos polinômios de interpolação. Isso pode ser feito das seguintes maneiras: a primeira trata de não levar em conta a malha inicial e gerar uma nova malha completa; a segunda envolve uma subdivisão adequada dos elementos com erro acima daquele admissível; a terceira maneira busca uma realocação dos nós da malha, sem alteração da conectividade da mesma, mas gerando uma modificação dos tamanhos dos elementos, também definido como refino r .

A argumentação intuitiva para usar métodos adaptativos é que, para uma solução que é essencialmente irregular apenas localmente, não há necessidade da utilização de uma malha uniforme para resolver as irregularidades e também o processo não pode ser caro computacionalmente. Ou seja, a malha pode ser mais grosseira nas zonas onde a solução é suave, sem a perda da precisão. Uma metodologia ideal seria permitir a geração de uma malha não uniforme sobre a qual se obtém uma solução com precisão requerida com menor esforço computacional. O procedimento de adaptação mais comum consiste na obtenção de uma solução usando uma malha grosseira, estimando o erro da aproximação e refinando a malha das regiões com os maiores erros. O processo é repetido até que alguns requisitos de precisão sejam cumpridos (RACHOWICZ, 2000).

Em um processo de adaptatividade, é de fundamental importância a estimativa do erro. O estimador norteia o processo adaptativo, definindo qual elemento deve ser refinado ou aumentado.

Nesse processo, o objetivo é que, com a malha refinada, o erro esteja dentro de uma tolerância especificada e tão uniformemente distribuído pelo domínio quanto possível (OH; BATRA, 1999).

Segundo Lakhany e Whiteman (1999), o MEF adaptativo consiste na união do MEF e um algoritmo adaptativo para controle automático do erro quantitativo de discretização com base em alguma norma para atribuir um nível de tolerância admissível. O algoritmo de adaptatividade deve ser confiável (garantir o controle de erro) e eficiente (a malha final deve satisfazer o controle de erro).

Para Brandão (2008), o método h é um método interessante para o tratamento de singularidades. Por sua vez, o método p apresenta taxas de convergência mais altas que o método h em problemas com carregamentos e geometria suaves. Isso é efetivado por meio da introdução de funções hierárquicas. Entretanto, resultados numéricos demonstram que esse não é um método satisfatório para problemas com presença de singularidade. Por sua vez, o método r tem como vantagem o fato de manter inalterado o número de equações, mas a malha tem que ser rica o suficiente para fornecer um resultado satisfatório. Ele é mais eficiente em problemas dinâmicos, nos quais a distribuição de erros se modifica em função do tempo. Existem na literatura métodos combinados, como, por exemplo, o método h - p .

2.4 ESTIMADORES DE ERRO

Na maioria dos problemas de engenharia, a solução analítica é desconhecida. Portanto, existe a necessidade de aplicar um método numérico para obter uma aproximação da solução exata e, de preferência, com um baixo custo computacional. Nesses casos, por ser uma aproximação, é intrínseca a presença de erros. Esse tema tem sido fonte de grande preocupação dos pesquisadores nas últimas décadas (AINSWORTH; ODEN 2000; BABUSKA; RHEINBOLDT, 1978; COOK et al., 2002; REDDY, 2006; SZABÓ; BABUSKA, (1991); ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987).

É consenso na literatura que o erro presente em uma solução aproximada pelo MEF pode ser estimado de forma *a priori* ou *a posteriori*. Estimativas de erro *a priori* são baseadas em informações sobre a solução analítica do problema a qual, em geral, é desconhecida. Estimadores de erro *a priori* podem fornecer informações sobre taxas de convergência e estratégias de refinamento. Entretanto, os mesmos são dependentes de constantes que, em geral, não podem ser obtidas, o que dificulta sua utilização em procedimentos práticos (LINS, 2011).

Estimativas de erro *a posteriori* utilizam a própria solução numérica obtida para calcular valores mais precisos nos campos de tensões e/ou deformações (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; PICASSO, 2006). Estimadores de erro *a posteriori* são encontrados em vários trabalhos na literatura.

Segundo Grätsch e Bathe (2005), existe uma diversidade de estimadores de erro *a posteriori* na literatura e um bom estimador necessita que as seguintes características sejam evidentes:

- A estimativa do erro deve ser precisa, isto é, ser bem próxima do erro verdadeiro;
- A estimativa do erro precisa ser assintoticamente correta, ou seja, à medida que a densidade da malha é aumentada, a estimativa do erro deve tender a zero ou para o erro exato;
- Idealmente, a estimativa do erro deve produzir limites inferiores e superiores para o erro presente na solução numérica;
- A estimativa do erro não pode sobrecarregar o custo computacional total da análise;

- É necessário que o estimador do erro seja robusto com respeito a uma extensa gama de aplicações, incluindo a análise não-linear;
- Uma implementação do estimador do erro deve ser possível para guiar um processo de refinamento.

Dispor de um estimador de erro a *posteriori* que possua todas essas características é raro. Entretanto, o propósito aqui colocado é que, quanto mais das características o estimador dispuser, maior é sua eficiência (LINS, 2011).

Os estimadores de erro a *posteriori* podem ser subdivididos em dois tipos principais: Estimadores baseados em recuperação e estimadores baseados em resíduo (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; AINSWORTH; ODEN, 2000). Uma breve comparação relativa entre esses dois tipos é aqui apresentada.

De acordo com Ainsworth e Oden (2000), estimativas de erro a *posteriori* baseadas em recuperação não levam em consideração informações relativas ao problema original. Nesse caso, esses estimadores usam os resultados obtidos pelo MEF fazendo uma recuperação desses valores aproximados. Entretanto, essa característica pode ser considerada como ponto positivo. Segundo os autores, os estimadores baseados em resíduos são matematicamente mais completos e rigorosos se comparados aos de recuperação e, normalmente, exigem maior esforço computacional, pois aplicam MEF na equação do erro. Por outro lado, apesar de sua natureza heurística, os estimadores baseados em recuperação, quando comparados aos estimadores baseados em resíduo, podem ser considerados os mais eficientes do ponto de vista prático.

Babuska e Rheinboldt (1978) foram os primeiros a abordar a estimativa de erro a *posteriori* baseada em resíduo e provam a validade do estimador matematicamente. A qualidade de estimadores de erro a *posteriori* foi discutida, por exemplo, por Babuska *et al.* (1994).

Na literatura podem ser encontrados vários trabalhos que propõem estimadores de erro residual, por exemplo, Micheletti e Perotto (2006), Apel, Nicaise e Sirch (2011).

Zienkiewicz e Zhu (1987) apresentam uma estimativa de erro a *posteriori* baseada em recuperação tendo em vista a suavização do gradiente usando o método dos mínimos quadrados. No ano seguinte, os mesmos autores, Zhu e Zienkiewicz (1988) apresentam um processo adaptativo com o estimador de erro desenvolvido no trabalho anterior e utilizando refino do tipo h isotrópico. Neste

trabalho, é usado o critério de malha ótima baseado na equidistribuição do erro. Ou seja, por esse critério, o erro é igualmente distribuído por todos os elementos.

Zienkiewicz e Zhu (1992a, 1992b) apresentam um novo estimador para guiar os processos adaptativos, definido como estimador SPR (*Superconvergence Patch Recovery*). Nesses trabalhos, é aplicado o mesmo critério de malha ótima usado no trabalho de Zhu e Zienkiewicz (1988).

Oñate e Bugeda (1993) discutem dois critérios de malha ótima, aplicados na técnica de refino adaptativo. O primeiro critério é o da equidistribuição de erro, apresentado por Zhu e Zienkiewicz (1988). O segundo critério, proposto pelos autores, refere-se à equidistribuição do erro específico (ou densidade do erro). Nesse critério, é considerada uma medida do domínio (área, volume).

Novotny e Fancello (1998) aplicam a adaptatividade usando refino do tipo h , p e hp para estudar problemas de flexão elástica de placas semi espessas. Os autores utilizam a abordagem caracterizando a teoria de placas denominada de Reissner-Mindlin.

Castellazzi *et al.* (2010) utilizam o refino do tipo h -adaptativo com uma estimativa de erro *a posteriori*, denominado *Recovery by Compatibility in Patches* (RCP). O objetivo desse estimador é substituir todos os padrões por um sistema recuperado suave e contínuo. O procedimento é análogo ao estimador SPR, a diferença é que no RCP aplica-se uma equação de equilíbrio para obter a recuperação do gradiente.

Em relação aos estimadores de erro por recuperação, Zienkiewicz e Taylor (2000) afirmam que o processo é relativamente barato uma vez que cada componente é tratado separadamente. Entretanto, algumas observações devem ser feitas. Primeiro, os nós do contorno nunca devem ser usados na determinação da recuperação; sendo assim, são estabelecidos a partir dos valores nodais no interior do domínio. Se essa regra não for seguida, a superconvergência nos limites do contorno estará perdida. Segundo, nas bordas dos materiais, os valores das tensões nodais são iguais, para não permitir as descontinuidades de tensão. Finalmente, nos nós no interior ou nas faces de um elemento, os valores também devem ser iguais, geralmente pertencentes a vários padrões.

Diferentes tipos de técnicas de recuperação de gradiente são desenvolvidos com base na média ponderada, projeções locais ou globais, interpolação, algumas técnicas de suavização e métodos mínimos quadrados. A técnica de recuperação do

gradiente tem sido amplamente utilizada na prática da engenharia por sua robustez como um estimador de erro a *posteriori*, sua propriedade de superconvergência e sua eficiência na execução. Na literatura, há relativamente poucos estudos sobre recuperação do valor da função primitiva, além disso, para o elemento finito linear, a função de recuperação geralmente não resulta em superconvergência (HUANG, YANG, YI, 2014).

2.5 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DE TOPOLOGIA CONTÍNUA

A otimização em topologia tem como objetivo encontrar a distribuição de material ideal ao longo de um domínio; essa técnica tem sido reconhecida como uma abordagem promissora para obter desenhos conceituais inovadores sem qualquer conhecimento prévio das estruturas finais (SIGMUND; MAUTE, 2013; VAN DIJK et. al 2013; DEATON; GRANDHI, 2014).

A popularização do tema otimização estrutural em topologia (OET) teve início com o trabalho de Bendsøe e Kikuchi (1988), no qual foi proposto o problema cujo objetivo era maximizar a rigidez global da estrutura, restrito a uma quantidade de massa e também restrito implicitamente ao problema variacional de elementos finitos. Além disso, usou-se o método de homogeneização para o cálculo das propriedades dos materiais. A literatura apresenta dois tipos fundamentais de otimização topológica, a discreta e a contínua e existem várias abordagens em OET. Especificamente, para Emmendoerfer e Fancello (2014), a otimização topológica em estruturas contínuas desperta a atenção dos pesquisadores com a abordagem de maximizar a rigidez com restrições em volume.

Para Eschenauer e Olhoff (2001), pode-se distinguir a otimização topológica contínua entre duas abordagens: a chamada abordagem material, ou micro abordagem, e a geométrica ou macro abordagem. Na primeira abordagem, é escolhida uma microestrutura porosa sobre o domínio do projeto admissível para distribuir o material de maneira uniforme. Já a segunda abordagem consiste em um posicionamento iterativo de adição ou remoção de furos em pontos específicos do domínio.

O primeiro trabalho a abordar problemas de otimização topológica no contexto de estruturas contínuas com restrições sobre as tensões foi o de Duysinx e

Bendsoe (1998). Os autores utilizam o conceito de microestrutura SIMP, com objetivo de penalizar as densidades intermediárias.

Pereira, Fancello e Barcellos (2004) aplicam um algoritmo de otimização topológica com objetivo de minimizar a massa e restrições sobre as tensões. Usam a mesma abordagem de material SIMP e uma função de penalização das densidades intermediárias. Os autores também usam uma função de regularização para o gradiente, objetivando eliminar a ocorrência de *checkerboard*. A abordagem para solucionar o problema de otimização não linear é o método de Lagrangeano aumentado e para a restrição de tensão que envolve falha do material usam o critério de falha de von Mises.

Também Amstutz e Novotny (2010) aplicam um algoritmo em otimização topológica com objetivo de minimizar a massa e restrições sobre as tensões com abordagem baseada no método do gradiente topológico usando o critério de falha de von Mises. De maneira semelhante, os mesmos autores e Souza Neto (2012) usam a mesma abordagem, alterando apenas o critério de falha para Drucker–Prager.

Guest e Smith Genut (2010) empregam uma metodologia para reduzir o número de variáveis de projeto na otimização em topologia contínua. Sua abordagem é no contexto de formulações tradicionais contínuas, bem como formulação discreta usando algoritmo genético.

Bruggi e Duysinx (2012) aplicam um algoritmo em otimização topológica, com objetivo de minimizar a massa com restrição em tensões, envolvendo critério de falha de Drucker–Prager.

Holmberg, Torstenfelt e Klarbring (2013) discutem um problema de otimização em topologia desenvolvendo um método para relaxação das tensões. Os autores utilizam a abordagem baseada na norma-p ou a função Kreisselmeier-Steinhauser (K-S), para diminuir o número de restrições de tensões. Os autores não tratam restrições como uma medida local, mas como global. Luo, Wang e Kang (2013) introduzem o parâmetro K-S para reduzir a região das restrições em um problema de otimização topológica.

Qian (2013) apresenta uma forma de obter a densidade ótima no problema de otimização de topologia baseada em função B-spline, restringindo a distribuição de densidade.

Guo, Zhang e Zhong (2014) usam o método *level set* para impor restrições sobre os valores extremos descrevendo a topologia final ótima da estrutura.

Clausen, Aage e Sigmund (2014) apresentam uma formulação em otimização estrutural topológica baseada numa abordagem combinada através de um subproblema principal que busca minimizar a flexibilidade, com restrição em volume, e outro subproblema, secundário, o qual busca minimizar a perturbação quando as áreas vazias são introduzidas na estrutura.

Emmendoerfer e Fancello (2014) tratam do problema de mínima massa sujeito à restrição em tensões baseadas no critério de falha de von Mises. Os autores aplicam o método *level set* objetivando criar um algoritmo eficiente capaz de identificar regiões de concentração de tensões e obter a topologia ótima.

Gao et. al. (2015) aplicam uma técnica de otimização em topologia, integrada com sistemas de estrutura multicomponentes com o intuito de evitar um número elevado de restrições. Os autores utilizam uma abordagem adaptativa de agregação de restrição, baseada na função Kreisselmeier-Steinhaus (KS).

Cai e Zhang (2015) aplicam a abordagem *level set* em problemas de otimização topológica com restrição em tensão.

2.5.1 Técnicas acopladas de otimização topológica e refinamentos de malha

Pesquisadores têm proposto algumas técnicas de refino de malha mais sofisticadas que se concentram em regiões selecionadas da topologia. Alguns refinam regiões únicas em torno da interface sólido/vazio e usam filtros para alcançar a independência de malha de soluções. Outros propõem refinar a malha em torno de regiões sólidas e proporcionar desrefinamento em regiões vazias para diminuir ainda mais o custo computacional (GUEST; SMITH GENUT, 2010).

Maute e Ramm (1995) apresentam técnicas adaptativas em otimização topológica de estruturas contínuas com objetivo de melhorar a eficiência da topologia convencional no procedimento de otimização e a qualidade de seus resultados. Propõem um método que fornece ligação automática entre a otimização em topologia e a otimização de forma.

Bruggi e Verani (2011) apresentaram um algoritmo em otimização topológica adaptativa para minimizar a flexibilidade com restrições em volume. Para a adaptatividade aplicam dois estimadores de erro heurístico, o erro em geometria e o erro em flexibilidade.

Wang, Kang e He (2014) propõem um método adaptativo de otimização topológica em estruturas contínuas, usando o controle de erro independente para os campos de densidade e de deslocamento. Usam dois indicadores de erro: o indicador de erro em energia e o indicador de região cinza, usados para medir a precisão de análise e a qualidade da borda, respectivamente.

Duan, Li e Qin (2015) discutem o problema de otimização em topologia de fluxo de fluido, visando obter melhor resolução da interface com um mínimo de gasto computacional. Propõem um método de refino adaptativo, na otimização. Os autores usam o Método do Critério Ótimo, justificando que é uma abordagem eficiente e robusta, para problemas de otimização, com um grande número de variáveis de projeto. O Método Adjunto é aplicado na análise de sensibilidade.

Xianbao, Feifei e Xinqiang (2016) apresentam um método de malha adaptativa usando *level set*, para a solução de problema de otimização em topologia envolvendo equações que descrevem o escoamento de fluidos.

Seungmin, Sunghoon e Seungjae (2016) aplicam a abordagem de otimização topológica baseada em *level set* para um projeto de atuador magnético utilizando técnicas de refinamento de malha nos limites estruturais exatos para melhorar a precisão da análise de elementos finitos.

Yi e Sui (2016) propõem uma abordagem adaptativa de ajustar dinamicamente os limites de restrição, com base na razão entre o verdadeiro valor da restrição obtida pela solução analítica e na análise de elementos finitos. Tal abordagem inibe situações difíceis que muitas vezes ocorrem nos resultados finais de problemas de otimização em projeto de engenharia, Isto é, os resultados que violam as restrições, ou para os quais não existem restrições ativas.

Observa-se que essa metodologia é aplicável em vários fenômenos em engenharia e existem vários trabalhos que envolvem refino de malha isotrópica. No entanto, não foi encontrado qualquer trabalho que utiliza a abordagem de refino de malha adaptativa h-isotrópica aplicado em problema de otimização estrutural em topologia.

2.6 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES DO TRABALHO

Pela justificativa apresentada na introdução deste trabalho em relação à necessidade de avanço nas pesquisas com objetivo de propor projetos em

otimização de topologia com melhor nitidez, aliando ferramentas computacionais e matemáticas visando outras metodologias, esta tese se apresenta com duas contribuições principais.

A primeira importante contribuição científica deste trabalho é a proposta de uma metodologia de projeto ótimo de malha de elementos finitos adaptativa h -isotrópica, que se baseia na construção de uma forma quadrática para a densidade do erro. A segunda contribuição está relacionada à aplicação da metodologia em problemas bidimensionais de otimização estrutural em topológica contínua. O foco dessas contribuições é uma maior exatidão dos resultados, bem como uma melhor caracterização do contorno da forma final.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, são apresentados alguns conceitos que constituem a base teórica do corrente trabalho. Os temas abordados tratam de conceitos e definições relacionados à otimização estrutural topológica, análise de erros numéricos e refino adaptativo em elementos finitos.

3.1 OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA

Otimização matemática pode ser definida como um processo sistemático de determinação do vetor \mathbf{x} (variáveis de projeto) que minimiza ou maximiza uma ou várias funções f (denominada função custo ou objetivo). Em geral, esse problema possui limitantes (restrições), definidos através de funções relacionadas ao comportamento do sistema e/ou diretamente sobre os valores das variáveis de projeto.

Segundo Arora (2012), o modelo padrão de um problema de otimização é buscar o vetor $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ de n variáveis de projeto que minimiza a função custo

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.1)$$

sujeito a p restrições de igualdade

$$h_j(\mathbf{x}) = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (j = 1, \dots, p), \quad p < n \quad (3.2)$$

e a m restrições de desigualdade

$$g_k(\mathbf{x}) = g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad (k = 1, \dots, m). \quad (3.3)$$

Note-se que, entre essas m restrições de desigualdade, podem estar inclusos limites simples sobre as variáveis de projeto que, geralmente, podem ser postos no formato

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.4)$$

sendo \mathbf{x}^l e \mathbf{x}^u os vetores de limites inferiores e superiores, respectivamente, para o caso de variáveis de projeto contínuas. No caso de variáveis discretas, cada variável x_i é escolhida dentro de um conjunto D , de base discreta e dimensão d , por exemplo, $D = \{D_1, D_2, \dots, D_d\}$, sendo que nesse caso têm-se d^n possibilidades de solução. A união de todos os vetores \mathbf{x} que satisfazem a todas as restrições (3.2) e (3.3) caracterizam o conjunto viável ou região admissível do projeto. Ademais, o número de restrições de igualdade linearmente independentes deve ser menor ou igual ao número de variáveis de projeto. Caso contrário, tem-se um problema sobredeterminado significando, provavelmente, que a formulação possui alguma inconsistência.

3.1.1 Otimização não linear

No caso em que a função custo e as funções restrições são funções lineares tem-se um problema dito linear. Em geral, esse problema é resolvido pelo método simplex (RAO, 1996). De outro modo, para funções não lineares tem-se um problema não linear. Na literatura são encontradas inúmeras abordagens para esse tipo de problema (RAO, 1996, SUN; YUAN, 2006, ARORA, 2012).

O problema padrão de otimização (3.1)-(3.3) tem muitas aplicações práticas e existem muitos métodos para resolvê-lo. Em geral, no caso de programação não linear, a ideia consiste em eliminar as restrições $h_j(\mathbf{x})$ e $g_k(\mathbf{x})$, incluindo essas restrições na função objetivo, de maneira que o problema transformado tenha a mesma solução do problema original.

Particularmente, este trabalho utiliza uma técnica indireta de programação não linear com restrições de desigualdade, definido como Método Lagrangeano Aumentado (MLA), que é uma das inúmeras maneiras como um problema de programação não linear pode ser abordado. Essa é uma extensão dos métodos de Lagrange e da penalização quadrática. Ela reduz a possibilidade de problemas de mau condicionamento, através da introdução de estimativas dos multiplicadores de Lagrange. Nesse caso, o funcional objetivo é posto como uma combinação do funcional de Lagrange e do funcional de penalização quadrática (SUN; YUAN, 2006).

Segundo Rao (1996), o funcional Lagrangeano do problema padrão com restrições de igualdade (3.1) e (3.2) pode ser escrito como

$$\ell(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(\mathbf{x}), \quad (3.5)$$

sendo λ_i , $i = 1, 2, \dots, p$, os multiplicadores de Lagrange. A inclusão do funcional de penalização quadrática é usada para definir o novo funcional, denominado funcional Lagrangeano Aumentado e construído como

$$L(\mathbf{x}, \lambda, r_k) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^{(k)} h_j(\mathbf{x}) + r_k \sum_{j=1}^p h_j^2(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

sendo r_k uma constante positiva e denominada parâmetro da penalização quadrática. O problema de otimização é finalizado quando termina o processo iterativo que resolve o problema k , isto é, o método é resolvido, por completo, por uma família de subproblemas k . Para cada k -ésimo subproblema ocorre a atualização de r_k e dos multiplicadores de Lagrange $\lambda^{(k)}$. Nesse caso, o parâmetro r_k deve aumentar até um valor máximo prescrito. Para Arora (2012), os multiplicadores de Lagrange representam a força necessária para impor as restrições. Os multiplicadores de Lagrange são atualizados com base na aplicação da condição necessária para o ponto estacionário em (3.5). Assim, tem-se

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i} + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{x}_i} = 0, \quad (3.7)$$

sendo λ_j^* o j -ésimo multiplicador de Lagrange no ponto estacionário de ℓ . Similarmente, aplicando-se as condições necessárias de primeira ordem para o mínimo do funcional L em (3.6), tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i} + \sum_{j=1}^p (\lambda_j^{(k)} + 2r_k h_j) \frac{\partial h_j}{\partial \mathbf{x}_i} = 0. \quad (3.8)$$

Comparando as equações (3.7) e (3.8), tem-se

$$\lambda_j^* = \lambda_j^{(k)} + 2r_k h_j, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (3.9)$$

Essas equações são usadas para atualizar os valores de $\lambda_j^{(k)}$ como

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)} + 2r_k h_j(\mathbf{x}^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (3.10)$$

sendo que $\mathbf{x}^{(k)}$ indica o ponto de ótimo local ao final do subproblema k. O valor de r_k é atualizado como $r_{k+1} = cr_k$, com $c > 1$. A aplicação do método para este trabalho tem apenas uma restrição de igualdade.

Caso o problema apresente restrições de desigualdades, transformam-se todas as restrições de desigualdades em restrições de igualdade, inserindo variáveis de folga, de forma que o problema modificado tenha a mesma solução do problema padrão (3.1)-(3.3). A abordagem é feita de maneira análoga ao problema com restrições de igualdade.

3.2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA CONTÍNUA

Vários métodos de otimização estrutural topológica contínua têm sido apresentados na literatura. Entre eles podem ser citados a abordagem material, o gradiente topológico, o método *level set*, a analogia com modelos de remodelação de tecido ósseo entre outros.

a) Abordagem material

Nessa abordagem, em geral, emprega-se algum tipo de relaxação matemática do problema, a qual tem por base substituir o material por um material composto formado por uma microestrutura periódica (BENDSOE, KIKUCHI, 1988). Segundo Costa Jr. (2003), os modelos de microestrutura podem ser classificados em três grupos:

1) Modelos de laminados tipo *rank*: materiais laminados são um grupo de microestrutura que, ao serem aplicados, produzem uma forma relaxada do problema de otimização topológica. Cada célula da microestrutura periódica é construída a partir de camadas de diferentes materiais e vazios. Alguns trabalhos que empregam

esse tipo de microestrutura são Bendsøe e Kikuchi (1998) e Duysinx e Bendsøe (1998).

2) Modelos de micro células com vazios internos: baseia-se na ideia de inserir vazios internos em micro células da microestrutura, de modo a permitir que a densidade do material cubra toda a gama de valores entre o zero (vazio) e um (material sólido). Uma aplicação do conceito de modelo de micro células com vazios internos pode ser visualizada através do trabalho de Gea (1996).

3) Modelos artificiais ou modelo *SIMP*: esse modelo se baseia na criação de um material com microestrutura isotrópica e fictícia. A ideia original do método *SIMP* foi proposta por Bendsøe (1989); a partir dessa ideia foram desenvolvidos vários trabalhos. Pode-se citar, por exemplo, Bendsøe e Sigmund (1999), Fancello e Pereira (2003), Rozvany (2009), Bruggi e Duysinx (2012), Bruggi e Taliencio (2013) e Luo *et al.* (2013). Em Bendsøe e Sigmund (1999), define-se a densidade relativa como uma variável contínua ρ , que assume valor entre 0 e 1, inclusive. Um limite inferior pequeno é aplicado, $0 < \rho_{\min} \leq \rho$ para evitar singularidades quando da aplicação do MEF. A relação entre essa densidade e o tensor de material C_{ijkl} é escrita de forma empírica como

$$C_{ijkl}(\rho) = \rho^p C_{ijkl}^0. \quad (3.11)$$

Considerando que o tensor C_{ijkl} é qualquer e isotrópico, para qualquer densidade relativa ρ , o material é isotrópico, isto é, C_{ijkl}^0 é caracterizado por apenas duas variáveis: módulo de Young e o coeficiente de Poisson. Ademais, a equação (3.11) satisfaz as relações

$$C_{ijkl}(0) = 0 \quad \text{e} \quad C_{ijkl}(1) = C_{ijkl}^0. \quad (3.12)$$

Isso significa que o projeto final tem densidade relativa penalizada, ou seja, há uma tentativa de conduzir as densidades para zero ou um em todos os pontos. Para isso, considera-se um valor de p suficientemente grande, a fim de obter um projeto com desenhos 0-1; em geral, $p \geq 3$ é necessário (BENDSØE; SIGMUND, 1999).

b) Gradiente topológico

A ideia dessa técnica de otimização em topologia é inserir um furo muito pequeno em uma posição qualquer e pré-determinada do domínio, analisando o que acontece com um conjunto de funcionais objetivo e de restrição do problema. Isso representa as sensibilidades dos funcionais objetivo e das restrições em relação à não existência dessa parcela do domínio. Esse conceito de derivada topológica para um funcional de forma foi introduzido por Sokołowski e Zochowski (1999) e, na literatura, aparece como uma ferramenta na obtenção da topologia ótima de diversos problemas de engenharia (NOVOTNY; SOKOLOWSKI, 2013). Alguns trabalhos aplicam o conceito de derivada topológica como, por exemplo, Cea *et al.* (2000), Novotny *et al.* (2003) e Amstutz e Novotny (2010).

c) Método *level set*

O Método *level set* é uma técnica numérica usada em otimização de topologia estrutural que busca a forma ideal da topologia. Uma função de nível é definida de maneira que o contorno zero representa o limite da estrutura. Esse limite é introduzido na formulação do problema de forma que a análise de sensibilidade é empregada para definir sua evolução (GUO; ZHANG; ZHONG, 2014). Alguns trabalhos relacionados a essa técnica são Sethian e Shan (2008), Rong e Liang (2008), Wang *et al.* (2003), Roux *et al.* (2013) e Emmendoerfer e Fancello (2014).

Para Guo, Zhang e Zhong (2014), a abordagem material e conjunto de nível estão bem estabelecidas na literatura. A principal diferença entre elas consiste em como aproximam a função utilizada para indicar a topologia de uma estrutura e os tratamentos numéricos correspondentes.

d) Analogia com modelos de remodelação de tecido ósseo

Essa técnica é baseada na ideia de que o tecido ósseo possui a capacidade de ser um material em autoconstrução. O tecido ósseo possui, na sua natureza biológica, a capacidade de edificar estruturas muito resistentes que se remodelam e reparam a si próprias. Isto é, está em contínua renovação e, por consequência, ocorre o reforço do tecido ósseo quando o mesmo é submetido a carregamentos mecânicos. Com isso, existe a propensão de o módulo de rigidez alterar significativamente de região para região. Nesse sentido, pode-se dizer que o osso é

um sistema que se auto-organiza e a análise dessa abordagem no processo de otimização é bastante interessante. Essa técnica foi usada por Nowak (2006).

e) Algoritmos genéticos

São técnicas heurísticas de obtenção de soluções aproximadas de problemas de otimização global e se baseiam nos mecanismos de seleção natural e na genética natural. Essas técnicas são modelos computacionais inspirados na evolução¹. Nessas, uma população inicial evolui ao longo de várias gerações, de acordo com os princípios da sobrevivência do mais apto. Chapman e Jakiela (1996) aplicam algoritmos genéticos em otimização de topologia de estruturas contínuas, sendo que a cada elemento da malha é associado um gene. A reprodução acontece com a seleção aleatória de dois indivíduos da população, que são recombinados utilizando os mecanismos de cruzamento e mutação. Nesse processo, os indivíduos com melhor aptidão são favorecidos estatisticamente, isto é, as características originárias deles têm maior possibilidade de serem repetidas para os indivíduos filhos.

3.3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Para resolver problemas de interesse a que a solução analítica não é conhecida ou não possui, nas engenharias e ciências, faz-se necessário a aplicação de um método numérico. O objetivo é tentar se aproximar de uma solução, através de uma solução numérica. No caso em que o modelo matemático é resultante de uma ou mais equações diferenciais, é necessário ter algumas questões em mente, como por exemplo: qual método usar; qual a forma do domínio de interesse; se ao aplicar o método ele converge para solução; qual é a taxa de convergência e será que a solução aproximada é única? Várias abordagens figuram na literatura, entre elas, diferenças finitas, elementos finitos, elementos de contorno, entre outros.

O Método de Diferenças Finitas (MDF) se baseia na substituição das derivadas da equação diferencial por diferenças finitas. A fórmula de aproximação é obtida pela aplicação da expansão em série de Taylor da função a ser derivada. O domínio do problema contínuo é substituído por uma série de pontos discretos (nós),

¹ Charles Robert Darwin, 1809-1882, naturalista britânico, que apresentou à comunidade científica a ocorrência da evolução.

nos quais são calculadas as incógnitas do problema. O resultado é a aproximação da derivada em cada nó. Embora tal aproximação “ponto a ponto” seja conceitualmente fácil de entender, o método apresenta a desvantagem de que, em problemas que envolvem domínio de geometria irregular, há dificuldade na sua aplicação. O método funciona para os problemas de geometria simples e foi amplamente utilizado antes da invenção de um método mais eficiente e robusto referenciado por MEF e que é amplamente utilizado em problemas com geometria complexa (CHAPRA; CANALE, 2008).

O **Método de Elementos de Contorno** é um método computacional usado na solução de sistemas de equações diferenciais, formuladas em forma integral. Nesse método somente o contorno do problema é discretizado (dividido em elementos). Sua formulação transforma a Equação Diferencial Parcial em equações integrais sobre o contorno, as quais são resolvidas numericamente. Essa é uma ferramenta alternativa para a solução de sistemas de equações diferenciais em problemas de valor no contorno (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 2008). Em certas circunstâncias, esse método apresenta melhor desempenho que o MEF, como, por exemplo, quando o domínio de estudo for infinito ou semi-infinito. Outra vantagem se dá pelo fato de que envolve somente a discretização do contorno, o que diminui o custo computacional (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 2008).

Os métodos sem malha (**Meshfree**) têm apresentado bons resultados, em particular representam uma alternativa robusta nos casos em que o uso de malha na aproximação não é viável. Existem muitos métodos *Meshfree* propostos, para diferentes aplicações (LIU; GU, 2005).

O Método de Elementos Finitos será utilizado neste trabalho, portanto, na próxima seção será dada maior ênfase ao mesmo.

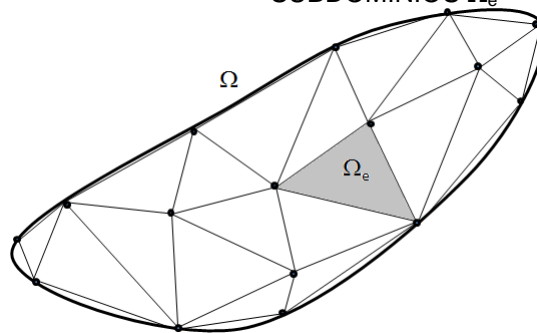
3.3.1 Alguns fundamentos matemáticos do MEF

A ideia básica do MEF consiste em subdividir o domínio Ω do problema, em subdomínios Ω_e (denominados elementos) de dimensões finitas tais como na (FIGURA 3), em que a união de todos os subdomínios seja aproximadamente igual ao domínio original. Em seguida, sobre cada subdomínio, faz-se uma aproximação local, isto é, para cada elemento tem-se uma solução aproximada descrita, em geral, por uma base polinomial. A solução global é obtida pela união de todas as soluções

locais, tomando-se cuidado para garantir a continuidade nas fronteiras entre os elementos.

Em geral, esse comportamento local é descrito com o emprego de funções simples. A característica principal desse procedimento consiste em utilizar aproximações locais nos subdomínios, nos quais o domínio original foi dividido, em vez de utilizar aproximações de caráter global. Uma maneira de obter aproximações cada vez melhores se dá, por exemplo, aumentando o número de subdomínios (elementos) refino h , mantendo-se o mesmo comportamento local já adotado em cada subdomínio. Outra maneira seria manter os mesmos subdomínios e adotar funções de aproximação de ordem mais elevada, refino p . Os subdomínios são denominados elementos finitos. Os elementos finitos são definidos por sua forma geométrica, pelas funções de aproximação adotadas e pelos tipos de problemas para os quais foram desenvolvidos. Cada elemento possui um número determinado de pontos nodais, ou nós, os quais podem ser comuns a outros elementos.

FIGURA 3 - EXEMPLO DE MALHA DE ELEMENTOS FINITOS NO DOMÍNIO Ω E NOS SUBDOMÍNIOS Ω_e



A aplicação do método de elementos finitos utiliza a técnica dos resíduos ponderados (Galerkin). Tal técnica busca obter a solução aproximada fazendo o uso do resíduo, que é ortogonal a um conjunto de funções de forma (REDDY, 2006). Esse processo resulta na forma fraca da equação diferencial original, em termos de bilinear e funcional linear. Obtêm-se as matrizes de rigidez elementares, em seguida, agrupadas, formando o sistema global de equações. Aplicam-se as condições de contorno (Dirichlet e Neumann), e a solução desse sistema de equações lineares fornece os valores aproximados das incógnitas (deslocamentos) em cada nó (REDDY, 2006; ODEN, REDDY, 2011; COOK *et al.*, 2002).

Uma notação bastante comum na bibliografia e utilizada, entre outros, por Oden e Reddy (2011), denota a função de aproximação em Elementos Finitos como $\mathbf{u}_{hp}(\mathbf{x})$, sendo h e p , respectivamente, o tamanho e a ordem polinomial do elemento padrão da malha corrente. Entretanto, neste trabalho é adotada a notação $\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$, em virtude de a ordem polinomial se manter constante ao longo de todo o processo de refino adaptativo.

Considere um problema de valor de contorno relacionado a uma dada equação diferencial elíptica. Suponha que a forma variacional correspondente a esse problema é dado por:

Encontrar $u \in U$, tal que

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (3.13)$$

em que U é o espaço de funções admissíveis e V é o espaço de variações admissíveis, definidos no domínio de análise $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sendo n a dimensão física do problema ($n = 1, 2$ ou 3), $B(\cdot, \cdot)$ é a forma bilinear contínua associada ao problema e definida em $U \times V$, e $F(\cdot)$ é um funcional contínuo e linear definido no espaço V .

A existência e unicidade da solução para o problema variacional (3.13) é garantida pelo Teorema de Lax-Milgram (REDDY, 1986), considerando a continuidade e a coercividade da forma bilinear, portanto, garantindo a estabilidade da solução numérica. Considerando um espaço finito, com norma e completo.

Teorema (Lax-Milgram): (REDDY, 1986)

Sejam U e V dois espaços de Hilbert² e $B: U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua com forma elíptica definida sobre U e V . Então, para qualquer funcional contínuo $F \in V$, existe um único $\mathbf{u} \in U$ tal que

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.14)$$

Para escrever a forma aproximada do problema variacional (3.13), tem-se:

Encontrar $\mathbf{u}_h \in U_h$, tal que

$$B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = F(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \subset V. \quad (3.15)$$

² Espaço de Hilbert é um espaço vetorial completo com produto interno.

Nesse caso, U_h e V_h são os subespaços de funções polinomiais por partes de ordem p , contidos em U e V , respectivamente, U_h é o subespaço das funções de aproximação e V_h é o subespaço das funções de variação admissíveis. A seguir discutem-se os erros presentes nessa aproximação numérica e maneiras de diminuir o impacto desses erros.

3.4 O ERRO EM ELEMENTOS FINITOS

Em aplicações do MEF, uma das mais críticas decisões é quanto ao tamanho dos elementos e sua ordem polinomial a serem utilizados na discretização. Na prática, o decisor tem que basear suas escolhas em experiências anteriores, em geral incompletas e muitas vezes conflitantes. Nesse caso, a confiança dos resultados finais depende da adequação das decisões iniciais (BABUSKA; RHEINBOLDT, 1978; SZABÓ; BABUSKA, 1991; COOK *et al.*, 2002).

Por ser uma aproximação, geralmente as soluções fornecidas pelo MEF para um dado problema real contém erros (diferença entre sua solução e sua aproximação). Estes erros podem ser atribuídos a três fontes principais (REDDY, 2006):

- Erros de aproximação do domínio: normalmente, pode-se entender como o erro nas informações dos dados do problema, porque a solução aproximada é obtida pela equação diferencial em um domínio modificado. Para mitigar esse tipo de erro, pode-se refinar a malha ou aumentar a ordem polinomial. Com isso, a representação do domínio tende a ser mais precisa, como consequência o erro diminui.
- Erros de aritmética finita e quadratura: são assim denominados em virtude de estarem associados às operações matemáticas realizadas pelo computador, quando se usa o MEF. Isto é, os erros de arredondamento nos cálculos dos números e os erros oriundos das operações numéricas de integrais são colocados na solução. A redução dos erros de integração numérica é possível pela especificação ideal do número de pontos de integração. Outra maneira para reduzir esse tipo de erro é evitar malha com elementos muito distorcidos, os quais podem provocar variações significativas no Jacobiano, prejudicando fortemente as operações na integração numérica.

- Erros de aproximação da solução: são erros que ocorrem em soluções por elementos finitos relacionados à substituição da solução do problema, em geral por uma união de segmentos de funções de aproximação (normalmente polinomiais).

Para que a solução aproximada via método dos elementos finitos seja confiável, o fator erro deve ter uma atenção especial no processo. Com isso, faz-se necessária a utilização de metodologias eficazes de estimativas de erro, objetivando conhecê-lo e controlá-lo.

3.4.1 Definições de erros

Seja a definição da função erro, $\mathbf{e}_u(\mathbf{x})$, decorrente da substituição da solução analítica $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ por uma solução aproximada, aqui denotada $\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$, escrita em termos da função primária do problema (no corrente caso, o campo de deslocamentos) e definida como

$$\mathbf{e}_u(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_h(\mathbf{x}). \quad (3.16)$$

Por sua vez, a função erro, medida em termos das deformações (uma função secundária do problema), pode ser definida como

$$\mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{x}) \quad (3.17)$$

e, em termos das tensões, como

$$\mathbf{e}_\sigma(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{x}). \quad (3.18)$$

Nesse caso, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ e $\boldsymbol{\sigma}_h(\mathbf{x})$ representam os campos de deformações analíticas, deformações aproximadas, tensões analíticas e tensões aproximadas, respectivamente.

Como $\mathbf{e}_u(\mathbf{x})$, $\mathbf{e}_\varepsilon(\mathbf{x})$ e $\mathbf{e}_\sigma(\mathbf{x})$ são funções definidas ao longo do domínio de análise *almost everywhere*³ $\mathbf{x} \in \Omega$, seus valores pontuais podem não representar de maneira significativa a qualidade da solução (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Uma alternativa é avaliar os erros em formato de norma, pois essa é uma única medida escalar positiva e válida para toda a malha (uma medida global do erro).

Considerando problemas da elasticidade bidimensional, a norma L_2 do erro aplicada aos campos de deslocamentos, de deformações e de tensões pode ser escrita, respectivamente, como

$$\|\mathbf{e}_u\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.19)$$

$$\|\mathbf{e}_\varepsilon\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h)^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

e

$$\|\mathbf{e}_\sigma\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

De maneira similar, sendo \mathbf{D} o tensor constitutivo do material, a norma do erro medida em energia, $\|\mathbf{e}\|_E$ pode ser escrita como:

$$\|\mathbf{e}\|_E = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.22)$$

$$\|\mathbf{e}\|_E = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h)^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

ou

$$\|\mathbf{e}\|_E = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.24)$$

³ *Almost everywhere* (em quase todo lugar). Ou seja, a função não é definida somente em alguns pontos de medida nula.

Nesses casos, Ω é o domínio no qual o problema está definido e D é o tensor que relaciona tensão com deformação (tensor de relação constitutiva do material).

Uma forma bastante comum de medir a qualidade global de uma solução aproximada é usar o conceito de erro relativo percentual η , avaliado em energia, de acordo com Zienkiewicz e Taylor (2000), como

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|_E}{\|\mathbf{u}\|_E} 100\%, \quad (3.25)$$

sendo $\|\mathbf{u}\|_E$ a norma da solução analítica (ou uma função que a aproxime) medida em relação à energia de deformação total da estrutura e obtida, por exemplo, como

$$\|\mathbf{u}\|_E = \left[\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T D \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.26)$$

Nessa seção, são discutidos os erros inerentes aos problemas de aproximação, da maneira como ocorrem, suas definições e como medir e avaliar sua performance. De maneira bem específica, a seguir, apresentam-se os conceitos que envolvem os estimadores de erro, para este trabalho, segundo a classificação definida na seção 2.4.

3.4.2 Estimativas do erro a *posteriori*

Como proposto por Huang *et al.* (2010), considera-se R_h um operador de reconstrução aplicado à aproximação numérica \mathbf{u}_h . Esse operador pode ser um processo de recuperação, um operador de suavização, ou um operador qualquer ligado a uma estimativa de erro a *posteriori*. Considera-se que a função recuperada ($R_h \mathbf{u}_h$) é melhor do que a função de aproximação \mathbf{u}_h . Essa característica permite considerar a função como uma solução melhorada. Assim, pode-se escrever que:

$$\|R_h \mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_U \leq \beta \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_U, \quad (3.27)$$

sendo $0 \leq \beta < 1$ e $\|\cdot\|_U$ a norma que caracteriza U o espaço de funções admissíveis.

Pela desigualdade triangular, tem-se

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_U \leq \frac{1}{1-\beta} \|\mathbf{R}_h \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h\|_U. \quad (3.28)$$

Assim, sendo a função erro definida em relação à variável primária, $\mathbf{e}_h = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$, nota-se pela equação (3.28) que o erro da solução por elementos finitos \mathbf{u}_h é limitado pelo erro obtido via solução recuperada $\mathbf{R}_h \mathbf{u}_h$.

Por outro lado, partindo-se do problema variacional (3.13) e reescrevendo $\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h = \mathbf{e}_h + \mathbf{u}_h$, tem-se

$$B(\mathbf{e}_h, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.29)$$

Considerando que a forma variacional (3.29) é válida para toda função $\mathbf{v} \in V$ e tomando $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h \in V_h \subset V$, tem-se, considerando a equação (3.15), que

$$B(\mathbf{e}_h, \mathbf{v}_h) = F(\mathbf{v}_h) - B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \Rightarrow B(\mathbf{e}_h, \mathbf{v}_h) = 0. \quad (3.30)$$

Ou seja, a função erro analítica da corrente malha é ortogonal a qualquer função de variação admissível \mathbf{v}_h .

Como posto por Huang *et al.* (2010), pode-se definir uma aproximação \mathbf{z}_h para o erro exato da corrente malha de elementos finitos na forma $\mathbf{z}_h = \mathbf{R}_h \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h$. Em geral, o operador \mathbf{R}_h reconstrói a função de aproximação elevando sua ordem polinomial. Logo, $\mathbf{R}_h \mathbf{u}_h \notin U_h$, mas $\mathbf{R}_h \mathbf{u}_h \in W_h$, sendo que o espaço W_h é uma extensão hierárquica de U_h . Definindo-se uma translação de W_h para satisfazer as condições de contorno de Dirichlet homogêneas como W_{h0} , tem-se que $\mathbf{z}_h = \mathbf{R}_h \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h \in W_{h0}$.

Colocando-se o problema variacional (3.15) na forma estendida pelo operador de recuperação, tem-se:

Encontrar $R_h \mathbf{u}_h \in W_h$, tal que

$$B(R_h \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) = F(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in W_{h0}. \quad (3.31)$$

Reescrevendo a função recuperada como

$$R_h \mathbf{u}_h = R_h \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h = \mathbf{z}_h + \mathbf{u}_h, \quad (3.32)$$

tem-se que o problema variacional (3.31) pode ser reescrito como:

Encontrar $\mathbf{z}_h \in W_{h0}$, tal que

$$B(\mathbf{z}_h, \mathbf{w}_h) = F(\mathbf{w}_h) - B(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in W_{h0}. \quad (3.33)$$

Nota-se pelo problema (3.33), que a estimativa do erro \mathbf{z}_h pode ser vista como uma aproximação da projeção ortogonal do verdadeiro erro no subespaço W_h . Além disso, essa definição do erro é uma estimativa global e sua solução pode ser significativamente onerosa do ponto de vista computacional (HUANG *et al.*, 2010).

3.4.3 Estimativa do erro *a posteriori* baseado em recuperação

Geralmente a solução exata \mathbf{u} não é conhecida. Nesse caso, uma alternativa para a estimativa do erro é utilizar uma solução recuperada $R_h \mathbf{u}_h$, com erro reduzido e que apresente uma taxa de convergência superior à taxa da função aproximação obtida pelo MEF. Desse modo, tendo como referência a equação (3.24), a norma do erro exato em energia pode ser substituída pela norma do erro em relação à solução recuperada como

$$\|\mathbf{e}^*\|_E = \left[\int_{\Omega} (R_h \sigma_h - \sigma_h)^T D^{-1} (R_h \sigma_h - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.34)$$

Ou seja, a magnitude do erro recuperado $\|\mathbf{e}^*\|$ é obtida pela substituição da solução exata por uma solução melhorada, que é obtida pela suavização da aproximação pelo MEF. Esses estimadores são denominados estimadores de erro baseados em recuperação (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

Para Zienkiewicz e Taylor (2000), a precisão ou a qualidade de um estimador de erro pode ser avaliada pelo índice de efetividade, θ , definido como

$$\theta = \frac{\|\mathbf{e}^*\|_E}{\|\mathbf{e}\|_E}. \quad (3.35)$$

onde $\|\mathbf{e}\|_E$ é a norma do erro exato, $\|\mathbf{e}^*\|_E$ é a norma do erro recuperado e $\|\mathbf{e}_h\|_E$ é a norma do erro aproximado. Nesse caso, os autores mostram que, para todos os estimadores baseados em recuperação (ZIENKIEWICZ, TAYLOR, 2000, pág 386), o índice de efetividade é limitado por

$$1 - \frac{\|\mathbf{e}_h\|_E}{\|\mathbf{e}\|_E} \leq \theta \leq 1 + \frac{\|\mathbf{e}_h\|_E}{\|\mathbf{e}\|_E}, \quad (3.36)$$

O índice de efetividade é a razão entre a norma do erro estimado e a norma do erro exato. Nesse caso, diz-se que um estimador de erro é assintoticamente exato quando o índice de efetividade tende a um, se o tamanho padrão da malha h tende a zero. O estimador de erro (3.34) é assintoticamente exato, dá bons resultados e apresenta superconvergência em malhas estruturadas.

A seguir discute-se sobre a função recuperada ($R_h \mathbf{u}_h$), apresentada na seção 3.4.2, e suas abordagens segundo a literatura existente.

3.4.4 Recuperação do Gradiente

Na formulação clássica do MEF, baseado em deslocamento, a aproximação da solução analítica obtida pelo MEF é realizada a partir de funções de forma e apresenta continuidade C^0 . Portanto, seu vetor gradiente é descontínuo na interface entre elementos. A consequência disso é que, ao se basear uma aproximação linear por partes, por exemplo, o MEF leva a uma distribuição de gradientes com saltos na fronteira dos elementos. Para contornar esse problema e tornar a derivada contínua, a ideia consiste em usar a própria aproximação obtida com o MEF para calcular um novo campo de tensões de mesmo grau de continuidade da aproximação da função primária (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

3.4.4.1 Estimador de erro baseado no Método da Média Nodal

A recuperação do gradiente via Método da Média Nodal (MN) é um método baseado no cálculo da média dos gradientes, executado em cada nó. Considere que um nó i é compartilhado por vários elementos (uma quantidade N_p , que formam o padrão de conectividade do nó). Portanto, as informações atribuídas ao nó i têm influência de todos os elementos que formam seu padrão de conectividade. No presente trabalho e seguindo Cook *et al.* (2002), como exemplo, no nó i existem N_p diferentes valores de $(\sigma_h)_i$. Pode-se estimar o vetor de médias nodais das tensões recuperadas $(\sigma^*)_{no}$ para o nó no , através da média simples, na forma

$$(\sigma^*)_{no} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} (\sigma_h)_i. \quad (3.37)$$

Nesse caso, o vetor de tensões $(\sigma^*)_{no}$ representa o vetor tensão nodal média dos elementos conectados ao nó no , N_p é o número total de elementos conectados a esse nó e $(\sigma_h)_i$ é o vetor tensão aproximado pelo MEF (diferenciação direta do campo de tensões) obtido através do i -ésimo elemento desse padrão.

Um campo suavizado e contínuo entre os elementos pode ser construído através das tensões médias nodais recuperadas, equação (3.37), e utilizando as mesmas funções de interpolação Ψ utilizadas na aproximação dos deslocamentos. Assim, o campo suavizado das tensões, via recuperação Média Nodal, definido sobre um elemento, pode ser escrito como

$$\sigma_{MN}^* = \Psi(\sigma^*)_{no}, \quad (3.38)$$

onde σ_{MN}^* é o campo suavizado das tensões, via recuperação pelo Método da Média Nodal, para cada elemento. Aplicando-se os conceitos da norma em energia (3.34) em cada elemento é possível calcular os erros localmente, ou seja, o erro elementar é estimado através da norma em energia usando o MN.

3.4.4.2 Estimador de erro Zienkiewicz e Zhu

O estimador de erro Zienkiewicz e Zhu (ZZ) é também conhecido como estimador ZZ, Z2 ou projeção L2. O método (ZZ) possui uma abordagem semelhante à adotada pelo Método da Média Nodal, ou seja, o erro é estimado através de um campo de tensões suavizado e contínuo ao longo de todo o domínio, obtido a partir da interpolação dos valores nodais recuperados e utilizando as mesmas funções de forma empregadas para interpolar os deslocamentos nodais. A diferença entre os estimadores está na forma de recuperar os valores nodais das tensões.

Segundo Cook *et al.* (2002), os valores nodais recuperados das tensões podem ser obtidos a partir de um ajuste via método de mínimos quadrados associados à minimização da diferença quadrática entre o campo de tensões suavizado σ^* e o vetor tensão aproximado por elementos finitos σ_h . Nesse caso, essa diferença é dada pelo funcional

$$\Pi = \sum_{\Omega} \int (\sigma^* - \sigma_h)^T (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega, \quad (3.39)$$

onde σ^* é o campo das tensões (desconhecido) e pode ser escrito, por exemplo, da mesma forma da equação (3.38). Portanto, para esse caso, esse campo pode ser obtido como $\sigma^* = \Psi \sigma_g^*$, onde σ_g^* é o vetor das tensões nodais obtido via recuperação ZZ.

Sejam as condições necessárias de primeira ordem, para minimização do funcional (3.39), em relação ao vetor σ_g^* , dados por

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma_g^*} = \sum_{\Omega} \int \Psi^T (\sigma_g^* - \sigma_h) d\Omega = \sum_{\Omega} \int \Psi^T (\Psi \sigma_g^* - \sigma_h) d\Omega = 0. \quad (3.40)$$

Reorganizando a equação (3.40), tem-se

$$\left(\sum_{\Omega} \int \Psi^T \Psi d\Omega \right) \sigma_g^* = \sum_{\Omega} \int \Psi^T \sigma_h d\Omega. \quad (3.41)$$

Agrupando os termos e isolando o vetor de incógnitas $\boldsymbol{\sigma}_g^*$, tem-se

$$A\boldsymbol{\sigma}_g^* = \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}_g^* = A^{-1}\mathbf{f}, \quad (3.42)$$

onde A é uma matriz equivalente a uma matriz “massa” com densidade unitária, calculada por

$$A = \left(\sum \int_{\Omega} \Psi^T \Psi d\Omega \right) \quad (3.43)$$

e \mathbf{f} é o vetor obtido por

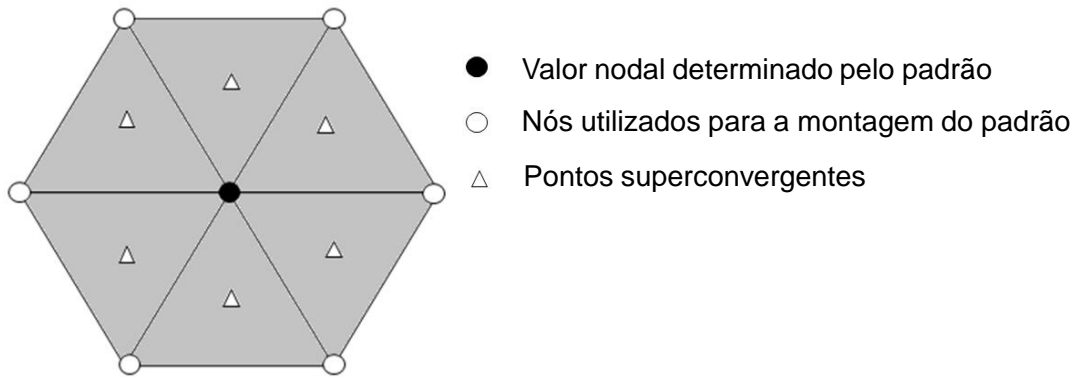
$$\mathbf{f} = \left(\sum \int_{\Omega} \Psi^T \boldsymbol{\sigma}_h d\Omega \right). \quad (3.44)$$

A solução do sistema de equações (3.42) fornece as incógnitas $\boldsymbol{\sigma}_g^*$, que é o vetor recuperado das tensões nodais (medida global). Comparando o estimador MN e o estimador ZZ, verifica-se que o ZZ exige um esforço computacional maior.

3.4.4.3 Estimador de erro *Superconvergent Patch Recovery*

Em um problema estrutural, quando ele é solucionado via MEF, aparecem pontos no interior de cada elemento. Tais pontos apresentam comportamento definido como superconvergência. Nesses pontos, os valores das deformações ou tensões apresentam um erro que diminui mais rápido que em outras regiões do elemento. A localização desses pontos para o campo de tensões coincide com os pontos de Gauss que são usados para integrar a matriz de rigidez em elementos não distorcidos (BARLOW, 1976).

FIGURA 4 - PONTOS SUPERCONVERGENTES INTERNOS EM CADA ELEMENTO, NO PADRÃO DO NÓ - CST



FONTE: Adaptado de Zienkiewicz e Taylor, 2000.

O estimador de erro Superconvergent Patch Recovery (SPR) baseia-se na construção de um polinômio que aproxima o campo de tensões e, a partir desse polinômio, são obtidos os valores recuperados nos nós. O estimador realiza um ajuste por mínimos quadrados na diferença entre a tensão aproximada por MEF e os valores de tensão recuperados obtidos nos pontos superconvergentes (FIGURA 4). Aplica-se o conceito de padrões (*patch*) e se obtém o polinômio que aproxima as tensões dentro de um conjunto de elementos constituído na vizinhança do nó em análise e não o polinômio aproximado ao longo de todo o domínio.

A aproximação da solução recuperada do campo de tensões em um padrão isolado pode ser definida como (CASTELLAZZI, 2007)

$$\sigma_R^* = P^* \mathbf{a}, \quad (3.45)$$

sendo P^* uma matriz de funções de aproximação e \mathbf{a} o vetor dos coeficientes incógnitas do polinômio de recuperação. Como exemplo, em um problema de elasticidade plana, a equação (3.45) pode ser vista, termo a termo, como

$$\sigma_R^* = \begin{bmatrix} \sigma_{j=1}^i \\ \sigma_{j=2}^i \\ \sigma_{j=3}^i \end{bmatrix}, \quad P^* = \begin{bmatrix} \bar{P}(x,y) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{P}(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{P}(x,y) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{j=1} \\ a_{j=2} \\ a_{j=3} \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

e

$$\bar{P}(x,y) = [1, x, y, \dots, y^p]. \quad (3.47)$$

onde $\bar{\mathbf{P}}(x, y)$ é um vetor dos termos polinomiais nas coordenadas (x, y) , de ordem p , \mathbf{a}_j é um vetor de incógnitas em cada componente de tensão recuperada j no i -ésimo nó e σ_j^i é a tensão recuperada da componente j no nó i .

Considera-se um funcional positivo Π que mede a diferença quadrática total entre a tensão aproximada por finitos e a tensão recuperada nos pontos superconvergentes dos elementos que compõem o padrão do i -ésimo nó, para o total de nps pontos superconvergentes de coordenadas (x_k, y_k) , tem-se

$$\Pi = \sum_{k=1}^{nps} [\boldsymbol{\sigma}_h(x_k, y_k) - \boldsymbol{\sigma}_R^*(x_k, y_k)]^2 = \sum_{k=1}^{nps} [\boldsymbol{\sigma}_h(x_k, y_k) - \mathbf{P}^*(x_k, y_k) \mathbf{a}]^2, \quad (3.48)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_h(x_k, y_k)$ é o vetor tensão aproximado por MEF do nó i , avaliados nos pontos superconvergentes, dos elementos que pertencem ao padrão do i -ésimo nó. A minimização do funcional Π fornece o vetor dos coeficientes. Aplicando-se as condições necessárias de primeira ordem, em relação ao vetor dos coeficientes \mathbf{a} , o ponto de mínimo do funcional (3.48) pode ser obtido através de

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}} = \sum_{k=1}^{nps} \mathbf{P}^{*T}(x_k, y_k) \mathbf{P}^*(x_k, y_k) \mathbf{a} - \sum_{k=1}^{nps} \mathbf{P}^{*T}(x_k, y_k) \boldsymbol{\sigma}_h(x_k, y_k) = 0. \quad (3.49)$$

Reescrevendo (3.49) como

$$\left(\sum_{k=1}^{nps} \mathbf{P}^{*T}(x_k, y_k) \mathbf{P}^*(x_k, y_k) \right) \mathbf{a} = \sum_{k=1}^{nps} \mathbf{P}^{*T}(x_k, y_k) \boldsymbol{\sigma}_h(x_k, y_k), \quad (3.50)$$

a solução do sistema de equações (3.50) é obtida por

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad (3.51)$$

sendo,

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{nps} \mathbf{P}^{*T}(x_k, y_k) \mathbf{P}^*(x_k, y_k) \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{nps} \mathbf{P}^{*T}(x_k, y_k) \boldsymbol{\sigma}_h(x_k, y_k). \quad (3.52)$$

Com os coeficientes \mathbf{a} calculados em (3.51), tem-se o campo recuperado do gradiente no nó central do padrão em (3.45), substituindo suas coordenadas. Aplicando o mesmo procedimento para todos os nós da malha é possível obter todos os valores recuperados de tensão σ_R^* . Pode ser empregada, por exemplo, a equação (3.38), para obter a distribuição das tensões no interior de cada elemento do domínio.

Esta seção discute a solução aproximada e a forma de quantificar os erros de aproximação. Também são apresentados os métodos de estimativa de erro, bem como a suavização do erro contínuo em todo domínio. Na próxima seção, são discutidos técnicas de mitigação deste erro através de refino do tipo h de malhas de elementos finitos de maneira automática.

3.5 REFINAMENTO ADAPTATIVO EM ELEMENTOS FINITOS

A adaptação de malha se tornou uma abordagem aceita para controlar a precisão em uma análise numérica por elementos finitos. A maioria dos processos de adaptação é guiada por indicadores de erro, os quais são obtidos usando a técnica de recuperação do gradiente ou a suavização do mesmo. Uma vantagem de métodos de recuperação é que eles não estão vinculados a um esquema numérico específico ou a uma aplicação específica. Portanto, os métodos de estimadores de erro, via recuperação, ampliam o campo de suas aplicações (VALLET *et al.*, 2007).

Na solução aproximada via MEF faz-se necessário que os cálculos sejam eficientes. Portanto, as utilizações de metodologias que envolvam a estimativa do erro e as técnicas adaptativas devem ser eficazes, de maneira que levem em consideração o tratamento do erro de maneira local e global.

Um processo adaptativo depende da eficiência e capacidade do estimador em calcular os erros locais, no entanto, os estimadores dependem da qualidade dos valores que são recuperados. Inicialmente as estimativas de erro tinham por objetivo identificar e dividir os elementos com um erro acima do admissível até que uma solução aproximada fosse aceita. Essa metodologia é cara do ponto de vista computacional, mesmo que ela seja eficaz (ZIENKIEWICZ, 2006).

Em relação ao refino de malha do tipo h , a literatura apresenta duas abordagens para o refino adaptativo: os refinamentos h -isotrópico e o h -anisotrópico.

Nesta seção discute-se o refino de malha do tipo h -isotrópica, apresentado na literatura, sendo que na próxima seção é feita uma proposta de malha do tipo h -isotrópica que é aplicada neste trabalho.

3.5.1 Tamanho h adaptativo isotrópico

Em um refino de malha de elementos finitos, o esperado é que o erro relativo percentual em energia η , definido na equação (3.25), seja menor ou igual a um valor admissível e pré-determinado $\bar{\eta} = \eta_{adm}$. Ou seja, dada uma malha k , onde o erro relativo é representado por η_k e

$$\eta_k > \bar{\eta}, \quad (3.53)$$

busca-se uma malha $k+1$ tal que o erro nessa malha seja

$$\eta_{k+1} \leq \bar{\eta}. \quad (3.54)$$

A nova malha é obtida com base no critério de malha ótima adotado por Zienkiewicz e Taylor (2000), onde se busca uma equidistribuição do erro elementar, avaliado na norma da energia que seja constante para todos os elementos.

Assim, o erro permitido total para a nova malha $\|\mathbf{e}_{k+1}\|$ é calculado como

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\| \equiv \bar{\eta} \|\mathbf{u}_{k+1}\| \approx \bar{\eta} \left[\|\mathbf{u}_{h,k}\|^2 + \|\mathbf{e}_k\|^2 \right]^{1/2}, \quad (3.55)$$

sendo $\|\mathbf{u}_{k+1}\|$ a norma do erro em energia total, na malha $k+1$, $\|\mathbf{u}_{h,k}\|$ a norma do erro em energia total, na malha k . Utilizando o conceito de que o erro (\mathbf{e}_k) é ortogonal à solução aproximada (\mathbf{u}_h) (CIARLET, 2002), tem-se

$$\|\mathbf{u}_k\|_E^2 = \|\mathbf{u}_{h,k}\|_E^2 + \|\mathbf{e}_k\|^2. \quad (3.56)$$

Assim, o erro médio $\bar{\mathbf{e}}$ em cada elemento para a próxima malha deve satisfazer

$$\bar{\mathbf{e}} \leq \bar{\eta} \left[\frac{\|\mathbf{u}_{h,k}\|^2 + \|\mathbf{e}_k\|^2}{N} \right]^{1/2}, \quad (3.57)$$

sendo N o número total de elementos da malha corrente.

Supondo o erro constante em cada elemento, pode-se definir um erro limite ($\bar{\mathbf{e}}_{\text{lim}}$) em cada elemento da malha $k+1$ como

$$\bar{\mathbf{e}}_{\text{lim}} = \bar{\eta} \left[\frac{\|\mathbf{u}_{h,k}\|^2 + \|\mathbf{e}_k\|^2}{N} \right]^{1/2}. \quad (3.58)$$

Para Zienkiewicz e Zhu (1987), uma solução é convergente e aceitável caso satisfaça os critérios de convergência em nível global e em nível elementar simultaneamente. A **convergência global** exige que o erro global, na norma em energia para a malha k $\|\mathbf{e}_k\|$ não ultrapasse um percentual da energia de deformação total $\|\mathbf{u}_k\|_E$, ou seja

$$\|\mathbf{e}_k\| \leq \bar{\eta} \|\mathbf{u}_k\|_E, \quad (3.59)$$

onde $\bar{\eta}$ é o valor do erro relativo percentual admissível global prescrito. A **convergência local** deve ser satisfeita e representa o erro limite por elemento. Ou seja, o erro no i -ésimo elemento é menor ou igual ao erro limite prescrito para cada elemento. Com isso, é possível definir um parâmetro ζ_k com o objetivo de satisfazer os dois parâmetros de convergência. O parâmetro representa a razão entre o erro no i -ésimo elemento e o valor de erro limite (admissível) isto é

$$\zeta_k = \frac{\|\mathbf{e}\|_k}{\bar{\mathbf{e}}_{\text{lim}}}, \quad (3.60)$$

sendo que o refinamento deve ser realizado sempre que $\zeta_k > 1$.

Assim, com base no critério da taxa de convergência assintótica para o erro de aproximação em cada elemento e assumindo a ausência de singularidades, tem-se (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000)

$$\|\mathbf{e}\|_k \leq Ch_k^p, \quad (3.61)$$

sendo h_k o tamanho padrão dos elementos da malha k , C uma constante dependente dos dados e p a ordem polinomial do elemento. Portanto a próxima malha deve ser limitada por um erro prescrito

$$\bar{e}_{lim} \leq Ch_{k+1}^p, \quad (3.62)$$

sendo \bar{e}_{lim} o erro estimado da nova malha. Operando (3.61) e (3.62), o tamanho do novo elemento h_{k+1} , pode ser obtido por

$$h_{k+1} = \frac{\bar{e}_{lim} h_k}{\|\mathbf{e}\|_k} = \zeta_k^{-\frac{1}{p}} h_k. \quad (3.63)$$

A equação (3.63) representa a estimativa do tamanho do novo elemento na próxima malha levando-se em consideração o erro em energia. Ou seja, h_k é o tamanho do elemento da k -ésima malha e h_{k+1} é o novo tamanho do elemento da próxima malha. Neste trabalho, para efeito de notação, a forma de projeção da nova malha a partir da equação (3.63) é referida simplesmente como abordagem Ch^p . No próximo capítulo, propõe-se uma nova abordagem para determinação do novo tamanho padrão dos elementos em malha isotrópica.

3.6 GERADOR DE MALHA

O software *Bidimensional Anisotropic Mesh Generator* (BAMG) é um gerador de malha bidimensional anisotrópica e faz parte do software FreeFem ++, (HECHT, 2006). Esse gerador pode criar uma malha a partir de uma geometria; adaptar uma malha a partir de uma malha de fundo usando um arquivo definido como métrica, ou

arquivo de solução; suavizar uma determinada malha qualquer, entre outros processos. Neste trabalho, para cada nó da malha atual foi fornecido um arquivo contendo um “tensor métrico”, que contém uma medida local ideal. Com essas informações o gerador apresenta uma nova malha, segundo os parâmetros fornecidos.

4 PROPOSTAS DE MALHA H-ISOTRÓPICA

Os projetos de refino de malha isotrópica com elementos triangulares e a projeção do tamanho do novo elemento, calculado segundo o critério da taxa de convergência assintótica para cada elemento (Ch^p), estão bem postos na literatura. No entanto, a ideia de propor uma nova metodologia para calcular o tamanho local dos novos elementos através de uma recuperação quadrática da função densidade do erro elementar é uma das contribuições deste trabalho.

Neste capítulo, é apresentada a metodologia de obtenção do tamanho ótimo de cada elemento para que o limite do erro não seja ultrapassado. A resposta para esse problema envolve o conceito de recuperação quadrática do erro em densidade de energia de deformação, além de técnicas de otimização.

4.1 RECUPERAÇÃO QUADRÁTICA DA DENSIDADE DO ERRO

No elemento triangular de deformação constante (CST), o deslocamento (u_h) é linear, a deformação (ϵ_h) é constante, as deformações recuperadas (ϵ^*) são lineares com a densidade em energia $u = \frac{1}{2}(\sigma^*)^T \epsilon$ quadrática.

A recuperação do erro em densidade de energia é feita por uma aproximação quadrática. A aplicação dessa metodologia considera as seguintes premissas: um domínio regular sem concentrações de tensões geométricas; carregamento de domínio sem singularidade e elemento finito triangular linear.

Seja um problema de elasticidade plana, que satisfaz as premissas postas anteriormente. Nesse caso, define-se o campo de deformações elementares obtido pelo MEF (ϵ_h) e o campo das deformações recuperadas (ϵ^*), respectivamente, como

$$\epsilon_h = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \epsilon^* = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^* \\ \epsilon_{22}^* \\ \gamma_{12}^* \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

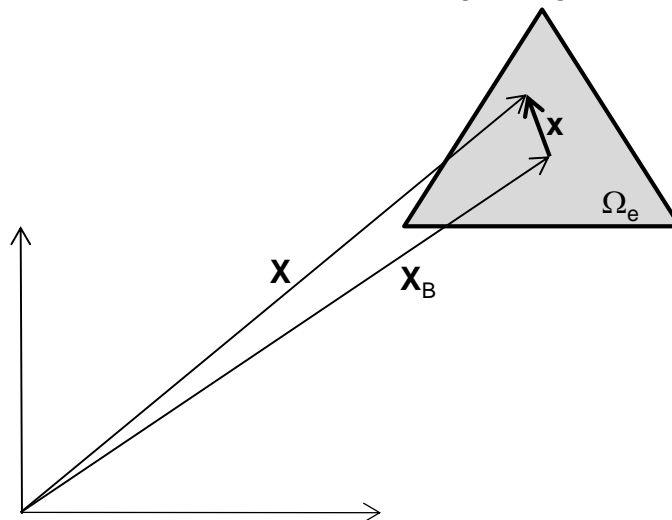
onde ε_{ij} denota a ij -ésima componente do vetor de deformações elementares obtidas pela diferenciação da solução \mathbf{u}_h e ε_{ij}^* denota a ij -ésima componente do vetor das deformações recuperadas e obtidas, por exemplo, via Método da Média Nodal Simples, estimador ZZ ou *Superconvergent Patch Recovery* (SPR). Note-se que todas essas técnicas fornecem valores nodais e, a partir desses valores e das funções de forma, os campos lineares de deformações em cada elemento.

Com isso, o vetor aproximação linear das deformações recuperadas pode ser expresso em forma matricial como

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \\ \gamma_{12}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_0^{11} + \mathbf{B}_1^{11}\mathbf{x} + \mathbf{B}_2^{11}\mathbf{y} \\ \mathbf{B}_0^{22} + \mathbf{B}_1^{22}\mathbf{x} + \mathbf{B}_2^{22}\mathbf{y} \\ \mathbf{B}_0^{12} + \mathbf{B}_1^{12}\mathbf{x} + \mathbf{B}_2^{12}\mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^{11} & \mathbf{B}_1^{11} & \mathbf{B}_2^{11} \\ \mathbf{B}_0^{22} & \mathbf{B}_1^{22} & \mathbf{B}_2^{22} \\ \mathbf{B}_0^{12} & \mathbf{B}_1^{12} & \mathbf{B}_2^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_\varepsilon^* \mathbf{P}, \quad (4.2)$$

onde \mathbf{B}_ε^* representa a matriz com os coeficientes do campo linear das deformações recuperadas, x e y são as coordenadas relativas de um ponto qualquer em relação ao baricentro do elemento e \mathbf{P} é um vetor contendo essas coordenadas. Nesse caso, o vetor de coordenadas relativas é dado por $\mathbf{x} = (\mathbf{X} - \mathbf{X}_B)$, onde \mathbf{X} é o vetor de coordenadas absolutas (sistema fixo) e \mathbf{X}_B é o vetor de coordenadas do baricentro elementar na FIGURA 5.

FIGURA 5 - COORDENADAS RELATIVAS \mathbf{x} DE UM PONTO QUALQUER NO INTERIOR DE UM ELEMENTO FINITO



Dessa maneira, uma componente qualquer ε_{ij}^* do vetor das deformações recuperadas pode ser escrita como

$$\varepsilon_{ij}^* = B_0^{ij} + B_1^{ij} x + B_2^{ij} y = (B_{\varepsilon}^{ij})^T \mathbf{P}. \quad (4.3)$$

4.1.1 Obtenção da matriz dos coeficientes

Usando a equação (4.3) com as coordenadas de cada nó do elemento, em cada componente $i-j$ do vetor deformação, tem-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^*(\text{nó}_1) &= B_0^{ij} + B_1^{ij} x_1 + B_2^{ij} y_1, \\ \varepsilon_{ij}^*(\text{nó}_2) &= B_0^{ij} + B_1^{ij} x_2 + B_2^{ij} y_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

e

$$\varepsilon_{ij}^*(\text{nó}_3) = B_0^{ij} + B_1^{ij} x_3 + B_2^{ij} y_3. \quad (4.5)$$

Colocando o sistema de equações (4.4) e (4.5) na forma matricial, tem-se o sistema linear de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_0^{ij} \\ B_1^{ij} \\ B_2^{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ij}^*(\text{nó}_1) \\ \varepsilon_{ij}^*(\text{nó}_2) \\ \varepsilon_{ij}^*(\text{nó}_3) \end{Bmatrix}. \quad (4.6)$$

Resolvendo-se esse sistema de equações (4.6), obtêm-se os valores de B_i , ($i = 0, 1, 2$) da aproximação linear em cada componente do vetor deformação recuperada elementar. Aplicando essa abordagem a todas as componentes do vetor de deformações, obtêm-se os coeficientes da matriz B_{ε}^* da equação (4.2).

4.1.2 Recuperação quadrática da densidade do erro

Deve-se considerar a função erro em deformações $\Delta \varepsilon = \varepsilon^* - \varepsilon_h$, como a diferença entre a deformação recuperada (ε^*) e a deformação (ε_h) obtida pela diferenciação dos deslocamentos aproximados via MEF.

De posse das funções recuperadas para cada componente das deformações no elemento (4.6), (4.2) e o vetor deformação constante obtido por elementos finitos (4.1), a função $\Delta\epsilon$ pode ser obtida

$$\Delta\epsilon = \epsilon^* - \epsilon_h = B_\epsilon^* P - \epsilon_h = \begin{bmatrix} B_0^{11} & B_1^{11} & B_3^{11} \\ B_0^{22} & B_1^{22} & B_3^{22} \\ B_0^{12} & B_1^{12} & B_3^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ \epsilon_{22} & 0 & 0 \\ \epsilon_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}, \quad (4.7)$$

que resulta em

$$\Delta\epsilon = \begin{bmatrix} B_0^{11} - \epsilon_{11} & B_1^{11} & B_3^{11} \\ B_0^{22} - \epsilon_{22} & B_1^{22} & B_3^{22} \\ B_0^{12} - \epsilon_{12} & B_1^{12} & B_3^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = [B_\epsilon] P. \quad (4.8)$$

Assim, é possível obter a função densidade de erro em energia no elemento (Δu) como

$$\Delta u(x, y) = (\Delta\epsilon)^T D \Delta\epsilon = ([B_\epsilon] P)^T D [B_\epsilon] P = P^T B_\epsilon^T D B_\epsilon P, \quad (4.9)$$

sendo D o tensor constitutivo de rigidez. A expansão de (4.9) fornece uma equação com termos constante, lineares e quadráticos, dada por

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= \Delta u_0 + (G_1 x + G_2 y) + (H_{11} x^2 + 2H_{12} xy + H_{22} y^2) \\ &= \Delta u_0 + G_u^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T H_u \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Aplicando o conceito de norma do erro em energia (3.22), pode-se obter o erro total (u) em qualquer região no entorno do elemento Ω_e , como

$$\|u\|_{E_e}^2 = \int_{\Omega_e} \Delta u d\Omega = \int_{\Omega_e} (\Delta\epsilon)^T D \Delta\epsilon d\Omega. \quad (4.11)$$

Usando as equações (4.10) e (4.11) pode-se obter o erro elementar.

Expandindo a equação (4.13) como

$$E_{\odot}^2 = \int_{\Omega} \left[\Delta v_0 + (G_1 x + G_2 y) + (H_{11} x^2 + 2H_{12} xy + H_{22} y^2) \right] dx dy. \quad (4.14)$$

Reagrupando (4.14) e considerando coordenadas polares, isto é: $x = r \cos \theta$ e $dA = r dr d\theta$, tem-se

$$E_{\odot}^2 = \Delta v_0 \int_{\Omega} dx dy + G_1 \int_{\Omega} x dx dy + G_2 \int_{\Omega} y dx dy + \\ H_{11} \int_{\Omega} x^2 dx dy + 2H_{12} \int_{\Omega} xy dx dy + H_{22} \int_{\Omega} y^2 dx dy. \quad (4.15)$$

Calculando os termos da equação (4.15), tem-se que:

$$\int_{\Omega} x^2 dx dy = \int_{\Omega} x^2 dA = \int_{\Omega} r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \left(\int_0^r r^3 dr \right) d\theta = \frac{\pi r^4}{4} = \int_{\Omega} y^2 dx dy.$$

e

$$\int_{\Omega} x dx dy = \int_{\Omega} x dA = \int_{\Omega} r \cos \theta r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta \left(\int_0^r r^2 dr \right) d\theta = 0 = \int_{\Omega} y dx dy = \int_{\Omega} xy dx dy.$$

Portanto a equação (4.15) é obtida por

$$E_{\odot}^2 = \Delta v_0 \int_{\Omega} dx dy + H_{11} \int_{\Omega} x^2 dx dy + H_{22} \int_{\Omega} y^2 dx dy = \Delta v_0 A_{\odot} + H_{11} I_y + H_{22} I_x, \quad (4.16)$$

sendo A_{\odot} a área da circunferência e $I_y = I_x = \frac{\pi r^4}{4}$ os momentos de inércia da área em relação aos eixos X e Y , respectivamente.

Reescrevendo a equação (4.15), tem-se

$$E_{\odot}^2 = A_{\odot} \left[\Delta v_0 + (H_{11} + H_{22}) \frac{r^2}{4} \right]. \quad (4.17)$$

Dessa forma é possível formular o problema de otimização onde o objetivo é maximizar a área da circunferência, tal que em seu interior o erro em energia total seja limitado. Ou seja, determinar o raio $r \in \mathbb{R}^+$ como

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } -\pi r^2, \\ &\text{restrito a } \left\{ \pi r^2 \left[\Delta v_0 + (H_{11} + H_{22}) \frac{r^2}{4} \right] \leq E_{\text{adm}}^2, \right. \end{aligned} \quad (4.18)$$

sendo E_{adm} o erro admissível.

A solução desse problema pode ser obtida através da definição da função Lagrangeano, associada ao mesmo e definida como

$$L(r, \lambda) = -\pi r^2 + \lambda \left[\pi r^2 \left(\Delta v_0 + (H_{11} + H_{22}) \frac{r^2}{4} \right) - E_{\text{adm}}^2 \right], \quad (4.19)$$

sendo λ multiplicador de Lagrange associado à restrição de desigualdade na equação (4.18). As condições necessárias de primeira ordem desta função Lagrangeano são:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -2\pi r + \lambda \left[2\pi r \Delta v_0 + (H_{11} + H_{22}) \pi r^3 \right] = 0 \quad (4.20)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 \left(\Delta v_0 + (H_{11} + H_{22}) \frac{r^2}{4} \right) - E_{\text{adm}}^2 = 0. \quad (4.21)$$

Reorganizando (4.21) tem-se

$$\left[(H_{11} + H_{22}) \frac{\pi}{4} \right] r^4 + (\pi \Delta v_0) r^2 - E_{\text{adm}}^2 = 0. \quad (4.22)$$

A única solução positiva r^2 para a equação de segundo grau em (4.22) é dada por

$$r^2 = \frac{-(\pi\Delta u_0) + \sqrt{(\pi\Delta u_0)^2 + \pi(H_{11} + H_{22})E_{adm}^2}}{(H_{11} + H_{22})\frac{\pi}{2}}. \quad (4.23)$$

Note-se que o valor obtido pela equação (4.23) é o raio da circunferência ótima, em cujo interior o erro é limitado pelo erro máximo admissível.

Pode-se estabelecer uma relação entre o raio ótimo da circunferência e o tamanho do novo elemento. Aqui, a ideia é que o novo elemento seja triangular, equilátero e que tenha a mesma área da circunferência de raio r (4.23). Portanto, pode-se estimar o tamanho do novo elemento em função do raio da circunferência como

$$h^2 = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}r^2 \Rightarrow h \cong 2,7r. \quad (4.24)$$

A equação (4.24) fornece o tamanho h do novo elemento equilátero centrado no baricentro do elemento em análise. Obtidos os valores desses tamanhos para cada elemento, e com o auxílio de um software gerador de malha, é possível obter uma malha com elementos isotrópicos.

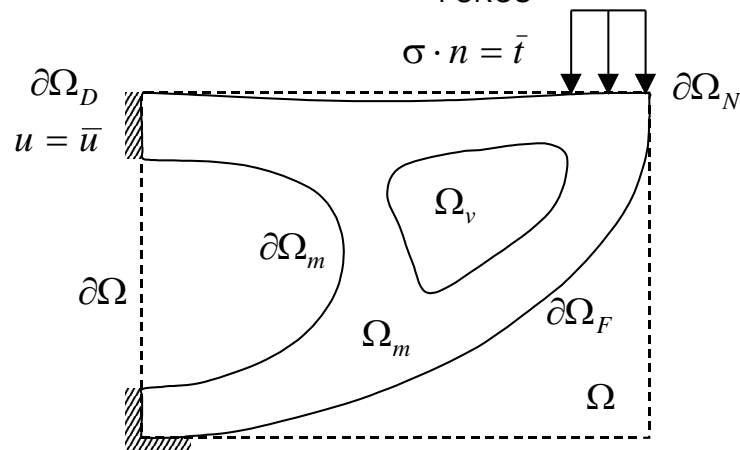
5 PROBLEMA PROPOSTO DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA

A finalidade deste capítulo é a apresentação do problema de otimização de topologia estrutural proposto e tem como objetivo encontrar a topologia ótima de um componente mecânico. A fundamentação teórica do trabalho é apresentada de forma sucinta neste capítulo.

5.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL TOPOLÓGICA

Seja um problema da Mecânica dos Sólidos deformáveis definido no plano $\mathbf{X}_1\text{-}\mathbf{X}_2$ e em estado plano de tensões (FIGURA 7). O componente é caracterizado por um domínio Ω e seu contorno é representado por $\partial\Omega$. As equações de equilíbrio são limitadas a problemas de elasticidade linear, onde o domínio Ω é sujeito a um carregamento externo de superfície \mathbf{t} e os deslocamentos $\bar{\mathbf{u}}$ conhecidos em parte do seu contorno.

FIGURA 7 - DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS DE UM DOMÍNIO COMPOSTO POR SÓLIDOS E FUROS



Fonte: FANCELLO; PEREIRA, 2003.

Nesse ponto, Ω é designado como a estrutura base (*ground structure*) que representa a região do espaço onde é feita a busca da presença ou não de material para caracterizar a região sólida do componente. É entendido, também, que a parcela do domínio ocupada por material é Ω_m e a parcela de vazios Ω_v . Se \mathbf{u} , $\varepsilon(\mathbf{u})$ e $\sigma(\mathbf{u})$ são, respectivamente, os campos de deslocamentos, deformações e tensões e \mathbf{D} é o tensor constitutivo de rigidez material (nesse caso, um material isotrópico,

elástico e linear), o problema de elasticidade linear satisfaz o seguinte conjunto de equações:

- Relação constitutiva do material:

$$\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{D}\varepsilon(\mathbf{u}). \quad (5.1)$$

- Equações cinemáticas (considerando pequenos deslocamentos \mathbf{u} e deformações ε):

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}). \quad (5.2)$$

- Equações diferenciais de equilíbrio, na ausência de forças de corpo:

$$\operatorname{div}(\sigma) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.3)$$

- Condições de contorno de Dirichlet:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (\bar{\mathbf{u}} \text{ conhecido}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_D \subset (\partial\Omega_m \cap \partial\Omega). \quad (5.4)$$

- Condições de contorno de Neumann não homogêneas:

$$\sigma \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad (\bar{\mathbf{t}} \text{ conhecido e não nulo}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_N \subset (\partial\Omega_m \cap \partial\Omega). \quad (5.5)$$

- Condições de contorno de Neumann homogêneas:

$$\sigma \mathbf{n} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_F := \partial\Omega_m \setminus (\partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D). \quad (5.6)$$

Definidas a geometria e as condições de contorno do problema pode-se obter, pela solução desse conjunto de equações, um campo vetorial de deslocamentos \mathbf{u} .

Considerando o conjunto Ω_m aberto e limitado e o contorno $\partial\Omega$ suficientemente suave, ou seja, existe um único vetor normal \mathbf{n} em quase todos os

pontos (*a.e.* - *almost everywhere*), pode-se estabelecer o problema da elasticidade linear, descrito acima, em um formato variacional. Com isso, é possível empregar todo um grande conjunto de resultados existentes na literatura associados à teoria de aproximação de equações diferenciais através do Método dos Elementos Finitos. A forma variacional do problema é

Encontrar a função $\mathbf{u} \in U(\Omega)$ tal que

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \quad (5.7)$$

onde $B(\cdot, \cdot): U \times V \rightarrow R$ é uma forma bilinear simétrica e $l(\cdot): V \rightarrow R$ é um operador funcional linear. Os espaços de funções U (denominado espaço de funções admissíveis) e V (espaço de variações admissíveis) são definidos, respectivamente, como

$$U = U(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in H^1 \mid \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \partial\Omega_D \right\} \quad (5.8)$$

$$V = V(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in H^1 \mid \mathbf{v} = 0 \text{ em } \partial\Omega_D \right\}, \quad (5.9)$$

sendo H^1 , espaço das funções de Hilbert de ordem 1. O problema variacional (5.7) tem solução única desde que satisfaça o teorema de *Lax-Milgram* (3.14).

5.1.1 Problema de Otimização

Definidos o problema de elasticidade linear e os espaços das funções de aproximação envolvidos, o projeto tem como objetivo obter uma topologia estrutural ótima, sendo conhecidos os valores e as regiões de aplicação dos carregamentos e as regiões de aplicação dos vínculos (condições de contorno de deslocamentos). A ideia é que a estrutura final possua a mínima flexibilidade restrita a uma quantidade em volume.

Matematicamente, de acordo com Bendsøe e Sigmund (2003), o problema de mínima flexibilidade pode ser expresso como

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{\mathbf{u}, \mathbf{D}_e} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ & \text{restrito a } \begin{cases} \mathbf{K}(\mathbf{D}_e) \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ \mathbf{D}_e \in \mathbf{D}_{ad} \\ M = \bar{M} \end{cases}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

sendo \mathbf{f} o vetor carregamento, \mathbf{u} o vetor deslocamento, \mathbf{K} a matriz de rigidez, \mathbf{D}_e o tensor elástico de rigidez do material, \mathbf{D}_{ad} o conjunto de tensores admissíveis no projeto, M o volume e \bar{M} o volume prescrito.

Em um projeto estrutural de topologia ótima, interessa-se na determinação da colocação de um dado material no domínio, isto é, deve-se determinar quais os pontos do domínio têm material e quais pontos são vazios (sem material). Para o problema de otimização definido anteriormente, esta abordagem implica que o conjunto de tensores de rigidez admissíveis \mathbf{D}_{ad} assume valores entre zero e um. Note-se que esta definição conduz a um problema discreto, e isso geralmente dificulta sua resolução.

A abordagem mais frequentemente utilizada para resolver o problema é substituir as variáveis discretas por variáveis contínuas, ou seja, modificar o problema através de uma relaxação do espaço admissível de solução. No entanto, isso geralmente conduz a instabilidades numéricas como o aparecimento de regiões de cinza e a ocorrência do fenômeno denominado *checkerboard* (PEREIRA, 2001).

5.1.2 Técnicas para relaxação do problema

São técnicas que consistem na definição de soluções generalizadas e a posterior extensão do funcional objetivo para englobar uma nova classe mais ampla de soluções generalizadas admissíveis. O objetivo é modificar as propriedades do integrando, inserindo uma penalização relaxando o problema. No capítulo 2 discutem-se diferentes tipos de microestruturas utilizadas com a intenção de relaxar o problema. Este trabalho utiliza a microestrutura SIMP, que é muito popular e extremamente eficiente (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

A utilização da microestrutura SIMP permite ao espaço de projeto uma variação contínua do material entre sólido e vazio. Neste caso, ρ é a densidade relativa do material e é contínua variando ao longo do domínio Ω , assumindo valores

entre 0-1. As propriedades constitutivas dependem dessa densidade relativa ρ e do tensor constitutivo do material sólido D , os quais são relacionados através da equação

$$D_p = f_D(\rho) D = \rho^p D. \quad (5.11)$$

Aqui, $f_D(\rho)$ representa uma relação empírica entre o tensor constitutivo de rigidez do material original sem porosidade, D é o tensor constitutivo isotrópico, D_p é o tensor de rigidez constitutivo para o material poroso com densidade ρ , considerando uma densidade relativa ($0 \leq \rho \leq 1$). Note-se que a relação $f_D(\rho)$ é exponencial de ρ , e que para $p > 1$ ocorre uma penalização das densidades intermediárias. Aqui, seguindo a maior parcela da bibliografia, é utilizado $p = 3$.

Assim o problema de otimização em topologia contínua de mínima flexibilidade, restrito a uma massa prescrita, apresentado em (5.10), considerando que o problema variacional é uma restrição implícita no problema, pode ser modificado como

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{\rho \in L^\infty(\Omega)} U(\rho) \\ & \text{restrito: } \begin{cases} M(\rho) = \int_{\Omega} \rho d\Omega = \bar{M} \\ 0 \leq \rho_{\min} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde $U(\rho)$ é a energia total de deformação acumulada que depende da densidade ρ , $M(\rho)$ o volume, \bar{M} o volume prescrito e ρ_{\min} o limite mínimo considerado para a densidade ρ . Uma medida em energia que representa a flexibilidade da estrutura é dada por

$$U(\rho) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^s \mathbf{u})^T D(\rho) \nabla^s \mathbf{u} d\Omega, \quad (5.13)$$

sendo $D(\rho)$ o tensor constitutivo.

A microestrutura SIMP penaliza as densidades intermediárias (regiões de cinza), atuando diretamente na rigidez do material. A inserção dessa estrutura fictícia facilita a evolução para o ótimo global, permitindo que elementos bem

porosos se tornem nulos mais facilmente e também elementos mais densos se tornem sólidos. Vários experimentos numéricos mostram que ainda ocorrem áreas com densidade intermediária e é interessante no problema ter uma menor quantidade de regiões de cinza (PEREIRA, 2001). Para amenizar isso, em seu trabalho o autor insere um funcional $f_m(\rho)$ que utiliza as densidades intermediárias para penalizar o funcional objetivo. No corrente trabalho é utilizada a função

$$f_m = \rho(1-\rho). \quad (5.14)$$

5.1.3 Técnicas para restrição do problema

Nas regiões do domínio onde a tendência é uma densidade intermediária na solução ótima, a solução numérica, em geral, tende a um campo oscilatório, gerando o fenômeno denominado *checkerboard*. Esse fenômeno surge em problemas de otimização topológica de estruturas contínuas que utilizam o Método dos Elementos Finitos e o Método da Homogeneização⁴ com microestruturas. É um evento puramente numérico e ocorre devido à modelagem inadequada da rigidez em elementos finitos de baixa ordem.

Os métodos baseados na restrição tentam manter limitadas as oscilações das variáveis de projeto. Isto é, são adicionadas restrições com o objetivo de limitar as oscilações das funções em uma escala finita. Para este trabalho, tendo como objetivo eliminar o fenômeno de *checkerboard*, é incorporado um limite para o gradiente F_p . Essa restrição, inicialmente local, é inserida no funcional objetivo através de penalização, sem alteração do conjunto de definição das funções densidades. Como proposto por Pereira, 2001, o corrente trabalho utiliza como forma de regularização o funcional

$$F_p = \int_{\Omega} \nabla \rho^T \nabla \rho \, d\Omega, \quad (5.15)$$

sendo $\nabla \rho$ o gradiente da densidade.

⁴ A homogeneização é uma teoria matemática para tratamento de materiais compostos e permite uma descrição contínua de meios não contínuos.

Inserindo o funcional de penalização (5.15) e o integrando da equação (5.14) no problema (5.12), tem-se o problema de otimização de mínima flexibilidade na forma regularizada e posto na forma

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{\rho \in L^\infty(\Omega)} \quad U(\rho) + r_m F_m(\rho) + r_\rho F_\rho(\rho) \\ & \text{restrito : } \begin{cases} M(\rho) - \bar{M} = h(\rho) = 0 \\ 0 \leq \rho_{\min} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \end{aligned} \quad (5.16)$$

sendo r_m o fator de penalização do funcional $F_m(\rho) = \int_{\Omega} f_m d\Omega$ e r_ρ o fator de penalização do funcional de regularização.

As discussões, até aqui, neste capítulo, buscam garantir existência de solução e a mitigação de ocorrência de instabilidades numéricas. Na próxima seção é apresentado o método de programação não linear utilizado para solução do problema de otimização proposto.

5.2 MÉTODO DO LAGRANGEANO AUMENTADO

Para resolver um problema de otimização não linear existem várias abordagens propostas na literatura. Neste trabalho, a opção é pelo Método do Lagrangeano Aumentado, discutido na seção 3.1.1.

Redefinindo o problema (5.16) através da construção do funcional Lagrangeano Aumentado, tem-se

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{\rho \in L^\infty(\Omega)} \quad L(\rho, \eta^k, r^k) = U(\rho) + r_m F_m + r_\rho F_\rho + \eta^k (h(\rho)) + r^k (h(\rho))^2 \\ & \text{restrito : } \{ 0 \leq \rho_{\min} \leq \rho(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (5.17)$$

sendo η^k o multiplicador de Lagrange (escalar) associado à única restrição de igualdade e r^k o fator de penalização quadrática desta restrição. O sobrescrito k se refere ao k -ésimo subproblema dentro da sequência de subproblemas de busca do ótimo. A solução do problema de otimização completo (5.17) é obtida resolvendo uma sequência de subproblemas com uma atualização apropriada dos parâmetros η^k e r^k .

5.2.1 Atualização do multiplicador de Lagrange e do fator de penalização

Pode-se notar que se $r^k = 0$, o funcional (5.17) é reduzido para a clássica abordagem do método da função de penalização. Na sequência de subproblemas, o multiplicador de Lagrange deve convergir para seu valor ótimo η^* . A minimização da equação (5.17) fornece a solução do problema (5.16) para qualquer valor do r^k . Para atualizar o multiplicador de Lagrange η segue um modelo clássico, o qual é centrado na comparação dos diferenciais dos funcionais Lagrangeano e Lagrangeano Aumentado. Considerando o funcional Lagrangeano

$$\ell(\rho, \eta^k) = U(\rho) + r_m F_m + r_p F_p + \eta^k (h(\rho)) \quad (5.18)$$

e aplicando-se as condições necessárias de primeira ordem em (5.18) tem-se

$$\frac{\partial \ell}{\partial \rho_i} = \frac{\partial U}{\partial \rho_i} + r_m \frac{\partial F_m}{\partial \rho_i} + r_p \frac{\partial F_p}{\partial \rho_i} + \eta^* \frac{\partial h}{\partial \rho_i} = 0, \quad i, \dots, n. \quad (5.19)$$

De maneira análoga, aplicam-se as condições necessárias de primeira ordem ao funcional Lagrangeano Aumentado (5.17), resultando em

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \rho_i} &= \frac{\partial U}{\partial \rho_i} + r_m \frac{\partial F_m}{\partial \rho_i} + r_p \frac{\partial F_p}{\partial \rho_i} + \eta \frac{\partial h}{\partial \rho_i} + 2r^k h \frac{\partial h}{\partial \rho_i} = \\ &= \frac{\partial U}{\partial \rho_i} + r_m \frac{\partial F_m}{\partial \rho_i} + r_p \frac{\partial F_p}{\partial \rho_i} + (\eta + 2r^k h) \frac{\partial h}{\partial \rho_i} = 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Comparando (5.19) com (5.20) e sabendo que no ponto ótimo o multiplicador de Lagrange η^* é único e, portanto, o objetivo a ser atingido, tem-se a sequência de atualização desse parâmetro na forma

$$\eta^{k+1} = \eta^k + 2r^k h(\rho). \quad (5.21)$$

Já para a atualização do fator de penalização, r^k deve crescer de maneira monotônica até certo limite $r_{\text{máx}}$, o que evita uma possível instabilidade numérica. O fator r^k pode ser atualizado da seguinte maneira:

$$r^{k+1} = tr^k, \quad t > 1 \quad \text{e} \quad r^{k+1} \leq r_{\text{máx}}. \quad (5.22)$$

Para solução do problema de otimização não linear é necessário obter a direção de busca da solução, ou seja, a direção de descida. Para isso, se faz necessária a análise da sensibilidade do funcional Lagrangeano Aumentado.

5.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

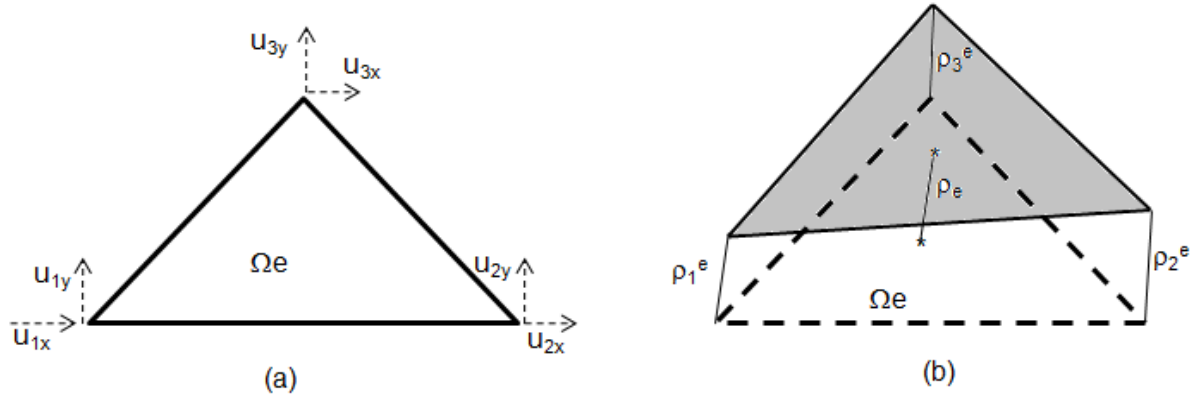
Em geral, os problemas de otimização estrutural envolvem funcionais dependentes do campo de deslocamentos \mathbf{u} , seja de maneira direta ou de maneira indireta. Esse campo é obtido pela solução do problema variacional. A obtenção da sensibilidade desse problema requer a existência e a obtenção dos diferenciais no sentido de Gateaux⁵ dos funcionais envolvidos no problema. Para a análise de sensibilidade, este trabalho se baseia num método descrito em Choi e Kim (2005), definido como método da variável adjunta.

Para verificar a sensibilidade do funcional (5.17) faz-se necessária a análise da sensibilidade de cada termo em separado. Inicialmente, define-se o campo de densidades usando a abordagem nodal, ou seja, a densidade é considerada em cada nó.

Na FIGURA 8, tem-se, no elemento Ω_e , o campo dos deslocamentos, considerando o elemento *Constant Strain Triangle* (CST) em Estado Plano de Tensões (EPT). Neste elemento definem-se \mathbf{u}_{ix} como o deslocamento do i -ésimo nó na direção x , \mathbf{u}_{iy} como o deslocamento do i -ésimo nó na direção y , e ρ_i^e ($i=1,2,3$) como as densidades (variáveis de projeto) em cada nó do elemento.

⁵ Em matemática, o diferencial Gateaux ou derivada Gateaux é uma generalização do conceito de derivada direcional em cálculo diferencial.

FIGURA 8 - ELEMENTO CST: (a) CAMPO DOS DESLOCAMENTOS, (b) CAMPO DA DENSIDADE RELATIVA



Nesse caso, o campo das densidades no elemento pode ser representado na forma linear como

$$\rho_e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \rho_i^e N_i^e(\mathbf{x}), \quad (5.23)$$

sendo $N_i^e(x)$ a i -ésima função de forma elementar.

Neste trabalho, para efeito de obtenção das matrizes de rigidez elementares a densidade elementar (ρ_e) é considerada constante e dada por

$$\rho_e = \frac{1}{3}(\rho_1^e + \rho_2^e + \rho_3^e) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \rho_i^e. \quad (5.24)$$

O funcional (5.17) é diferenciado em relação à densidade. Isso é realizado separando o funcional em cada termo:

i) a sensibilidade do termo $\eta^k h(\rho)$ é dada por:

$$\left(\eta^k h(\rho) \right)_G [\delta \rho] = \eta^k \left(M(\rho) - \bar{M} \right)_G [\delta \rho] = \eta^k (M)_G(\rho) [\delta \rho]. \quad (5.25)$$

Definindo N_{el} como o número total de elementos na malha e N_p o número total de elementos que compartilham o i -ésimo nó, A_e a área e t_e a espessura elementar, então a variação de M em relação a densidade do i -ésimo nó é dada por

$$\begin{aligned}
(M)_G(\rho)[\delta\rho] &= \frac{\partial}{\partial\rho_i} \left(\int_{\Omega} \rho d\Omega \right) = \frac{\partial}{\partial\rho_i} \sum_{e=1}^{Nel} \frac{1}{3} (\rho_1^e + \rho_2^e + \rho_3^e) A_e t_e = \\
&= \sum_{e=1}^{Nel} A_e t_e \frac{\partial}{\partial\rho_i} \frac{1}{3} (\rho_1^e + \rho_2^e + \rho_3^e) = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{3} A_i t_i.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Ou seja, a equação (5.26) que se refere a uma pequena variação na densidade do nó i vai atuar (adicionar a terça parte da densidade elementar) na sensibilidade do funcional em questão somente quando o nó i pertencer ao elemento e .

Substituindo a equação (5.26) na equação (5.25), tem-se

$$\eta^k(M)_G(\rho)[\delta\rho] = \eta^k \sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{3} A_i t_i. \tag{5.27}$$

- ii) A sensibilidade do termo $r^k (h(\rho))^2$ é obtida de maneira análoga usando as equações (5.24), (5.25) e (5.26):

$$\begin{aligned}
(r^k (h(\rho))^2)_G [\delta\rho] &= r^k (M(\rho) - \bar{M})_G^2 [\delta\rho] = 2r^k (M(\rho) - \bar{M})(M)_G(\rho)[\delta\rho] = \\
&= 2r^k \left(\left(\sum_{e=1}^{Nel} \frac{1}{3} (\rho_1^e + \rho_2^e + \rho_3^e) A_e t_e \right) - \bar{M} \right) \left(\sum_{i=1}^{N_p} \frac{1}{3} A_i t_i \right).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

- iii) A sensibilidade do termo $r_m F_m(\rho)$, funcional que inibe as densidades intermediárias (regiões de cinza), é dada por

$$\begin{aligned}
(r_m F_m(\rho))_G [\delta\rho] &= \frac{\partial}{\partial\rho_i} \left(r_m \int_{\Omega} \rho_e (1 - \rho_e) d\Omega \right) = r_m \sum_{e=1}^{Nel} \frac{\partial}{\partial\rho_i} (\rho_e (1 - \rho_e)) A_e t_e = \\
&= r_m \sum_{i=1}^{N_p} \left(\frac{1}{3} (\rho_1^e + \rho_2^e + \rho_3^e) - 2 \frac{1}{3} (\rho_1^e + \rho_2^e + \rho_3^e) \right) A_e t_e = \\
&= \frac{1}{3} r_m \sum_{i=1}^{N_p} (1 - 2\rho_e) A_e t_e.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

- iv) A análise de sensibilidade do termo $r_p F_p(\rho)$, funcional de regularização para inibição do *checkerboard*, pode ser posta como

$$\left(r_p F \rho(\rho) \right)_G [\delta \rho] = r_p \int_{\Omega} \left(\nabla \rho^T \nabla \rho \right)_G [\delta \rho] d\Omega = r_p \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega_e} \left(\nabla \rho_e^T \nabla \rho_e \right)_G [\delta \rho] d\Omega_e. \quad (5.30)$$

Especificamente, para este funcional, considera-se a expansão da densidade linear em cada elemento Ω_e . O vetor gradiente elementar é calculado, respectivamente, por

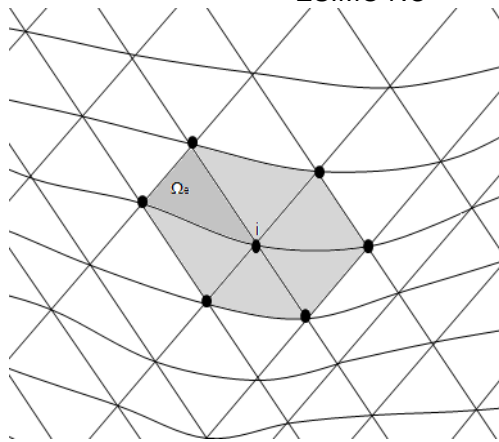
$$\begin{aligned} \rho_e(\mathbf{x}) &= N_1(\mathbf{x})\rho_1^e + N_2(\mathbf{x})\rho_2^e + N_3(\mathbf{x})\rho_3^e = \sum_{j=1}^3 N_j(\mathbf{x})\rho_j^e \\ \nabla \rho_e(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1^e \\ \rho_2^e \\ \rho_3^e \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \rho_e, \end{aligned} \quad (5.31)$$

sendo N_1 , N_2 e N_3 as funções de forma elementares lineares.

A sensibilidade desse funcional de regularização é

$$\begin{aligned} r_p \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega_e} \left(\nabla \rho_e^T \nabla \rho_e \right)_G [\delta \rho] d\Omega_e &= r_p \sum_{e=1}^{Nel} \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left(\nabla \rho^T \nabla \rho \right) A_e t_e = r_p \sum_{e=1}^{Nel} \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left[(\mathbf{B} \rho_e)^T \mathbf{B} \rho_e \right] A_e t_e \\ &= r_p \sum_{e=1}^{Nel} \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left(\rho_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \rho_e \right) A_e t_e = r_p \sum_{i=1}^{N_p} 2 \mathbf{B}^T \mathbf{B} \rho_i A_i t_i. \end{aligned} \quad (5.32)$$

FIGURA 9 – REPRESENTAÇÃO DO PADRÃO DE ELEMENTOS (PATCH) ASSOCIADO AO I-ÉSIMO NÓ



Para melhor compreensão das sensibilidades dos funcionais (5.27), (5.28) e (5.29), observa-se a FIGURA 9, sendo que os três primeiros se referem à

sensibilidade de cada funcional em decorrência de uma pequena variação da densidade do i -ésimo nó quando se está no e -ésimo elemento, isto é, o somatório da terça parte do funcional de cada elemento que compartilham do nó i . Por outro lado, o funcional (5.32) apresenta um vetor que representa a parcela dos três nós no elemento. Pode-se verificar também o número de elementos que compõem o padrão, associado ao i -ésimo nó. Com os funcionais (5.27), (5.28), (5.29) e (5.32) calculam-se alguns termos da análise de sensibilidade para o funcional (5.17).

v) A análise de sensibilidade do funcional energia de deformação $U(\rho)$

Esse termo envolve uma complexidade maior nos cálculos. Para Choi e Kim (2005), uma medida de desempenho estrutural pode ser escrita na forma integral

$$\psi = \int_{\Omega} g(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}, \rho). \quad (5.33)$$

A análise de sensibilidade, considerando o funcional (5.13) e a sensibilidade do funcional (5.33) é calculado por

$$\begin{aligned} \psi' &= \frac{d}{d\tau} \left[\int_{\Omega} g(\mathbf{u}(\rho + \tau\delta\rho), \nabla \mathbf{u}(\rho + \tau\delta\rho), \rho + \tau\delta\rho) d\Omega \right]_{\tau=0} \\ &= \int_{\Omega} (g_{,\mathbf{u}} \mathbf{u}' + g_{,\nabla \mathbf{u}} : \nabla \mathbf{u}' + g_{,\rho} \delta\rho) d\Omega, \end{aligned} \quad (5.34)$$

sendo τ uma constante, $\delta\rho$ uma pequena variação no campo das densidades $\rho(x)$, o operador contração “:”, definido como $a:b = a_{ij}b_{ij}$, \mathbf{u}' a sensibilidade de \mathbf{u} , $g_{,\mathbf{u}}$ o gradiente de g em relação a \mathbf{u} , $g_{,\nabla \mathbf{u}}$ o gradiente de g em relação a $\nabla \mathbf{u}$ e $g_{,\rho}$ o gradiente de g em relação a ρ .

Considera-se o problema variacional adjunto associado ao funcional ψ , segundo Choi e Kim (2005), posto como

$$a_u(\lambda, \bar{\lambda}) = \int_{\Omega} (g_{,\mathbf{u}} \bar{\lambda} + g_{,\nabla \mathbf{u}} : \nabla \bar{\lambda}) d\Omega, \quad \forall \bar{\lambda} \in V, \quad (5.35)$$

sendo que, para essa equação (5.35), λ é o vetor de deslocamentos adjuntos e $\bar{\lambda}$ o vetor de deslocamentos virtuais.

O problema variacional original é:

Encontrar $\mathbf{u} \in U$, tal que

$$a_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l_p(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (5.36)$$

Assim, realizando uma variação δ_p qualquer no campo de densidades, tem-se

$$a'_{\delta p}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_p(\mathbf{u}'_{\delta p}, \mathbf{v}) = l'_{\delta p}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (5.37)$$

Nessa configuração perturbada, o sistema continua em equilíbrio. Assim, o problema consiste em determinar a variação de \mathbf{u} , denotada por \mathbf{u}' , quando ρ é perturbado na direção genérica δ_p .

Encontrar $\mathbf{u}'_{\delta p} \in V$, tal que

$$a_p(\mathbf{u}'_{\delta p}, \mathbf{v}) = l'_{\delta p}(\mathbf{v}) - a'_{\delta p}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (5.38)$$

Objetivando agrupar os termos de interesse com uma direção especial, conforme (5.35), considerando \mathbf{u}_a como o deslocamento adjunto virtual, tem-se

$$\int_{\Omega} (g_{,u} \mathbf{u}_a + g_{,\nabla u} : \nabla \mathbf{u}_a) d\Omega = l'_{\delta p}(\mathbf{u}_a) - a'_{\delta p}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_a). \quad (5.39)$$

Reescrevendo (5.34) tem-se

$$\psi' = l'_{\delta p}(\mathbf{u}_a) - a'_{\delta p}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_a) + \int_{\Omega} (g_{,p} \delta p) d\Omega, \quad (5.40)$$

e também reescreve-se (5.35) como

$$a_p(\mathbf{u}_a, \mathbf{v}_a) = \int_{\Omega} (g_{,\nabla u} : \nabla \mathbf{v}_a) d\Omega = \int_{\Omega} (\varepsilon^T D(\rho) \nabla \mathbf{v}_a) d\Omega, \quad \forall \mathbf{v}_a \in V. \quad (5.41)$$

Desenvolvendo-se a equação (5.41), tem-se que os deslocamentos adjuntos são iguais aos deslocamentos aproximados pelo MEF.

Em (5.40), separam-se os termos do lado direito e desenvolve-os objetivando obter o valor do funcional. Assim, no primeiro termo, tem-se

$$\begin{aligned} a'_{\delta\rho}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_a) &= \frac{\partial}{\partial\rho} [a_p(\mathbf{u}, \mathbf{u}_a) \delta\rho] = \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} D(\rho) \nabla \mathbf{u}) d\Omega \right] \delta\rho = \\ &= \int_{\Omega} (q\rho^{q-1} \nabla \mathbf{u}^T D_0 \nabla \mathbf{u}) \delta\rho d\Omega. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Lembrando que $D(\rho) = \rho^q D_0$. No segundo termo tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (g_{,p} \delta\rho) d\Omega &= \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} D(\rho) \nabla \mathbf{u}) d\Omega \right] \delta\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (q\rho^{q-1} \nabla \mathbf{u}^T D_0 \nabla \mathbf{u}) \delta\rho d\Omega. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Substituindo os funcionais (5.43) e (5.42) no funcional (5.40), obtém-se

$$\psi' = - \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (q\rho^{q-1} \nabla \mathbf{u}^T D_0 \nabla \mathbf{u}) \delta\rho d\Omega \right). \quad (5.44)$$

Portanto, usando (5.44), obtém-se a solução para a análise de sensibilidade do funcional energia de deformação $U(\rho)$. Finalmente, calculada a variação de todos os termos do funcional (5.17), tem-se a análise da sensibilidade do funcional Lagrangeano Aumentado. Na próxima seção, são apresentados alguns resultados numéricos decorrentes da implementação numérica dos conceitos discutidos no capítulo 3 e do problema proposto no capítulo 5, objetivando a validação da abordagem proposta além dos resultados que a justifiquem.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, discute-se a implementação numérica da metodologia proposta. Inicialmente, é aplicada a metodologia objetivando a sua validação em problemas com soluções conhecidas na literatura. Neste capítulo, discutem-se alguns detalhes da implementação numérica além de apresentar alguns resultados relativos a esta formulação.

6.1 INTRODUÇÃO

No capítulo 5, foi apresentado o problema de projeto ótimo de topologia estrutural com objetivo de mínima flexibilidade e restrições em massa. As dificuldades intrínsecas a esse problema são as instabilidades numéricas. Para contornar isso, o problema inicialmente foi relaxado e depois regularizado, a fim de evitar as regiões com densidades intermediárias e as regiões parecidas com tabuleiro de xadrez. Para solução do problema de programação não linear é usado o Método Lagrangeano Aumentado e na sensibilidade dos funcionais é utilizado o método Adjunto.

6.2 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A solução do problema discutido no capítulo 5 apresenta uma solução aproximada através do Método dos Elementos Finitos (MEF). O cálculo numérico foi implementado no software MATLAB (MATrix LABoratory). Com base nas equações (3.15), (5.1) e (5.2) e considerando o elemento triangular linear de deformação constante (CST) em Estado Plano de Tensões, obtém-se o campo de aproximação dos deslocamentos (\mathbf{u}_h^e) ao longo de um elemento finito qualquer Ω_e da malha no domínio Ω , na forma

$$\mathbf{u}_h^e = \mathbf{N}\mathbf{u}_h, \quad (6.1)$$

onde \mathbf{N} é a matriz de funções de interpolação (ou funções de forma) elementar e \mathbf{u}_h é o vetor de deslocamentos nodais. Pode-se, também, calcular o campo das deformações ($\boldsymbol{\varepsilon}_h^e$) e das tensões ($\boldsymbol{\sigma}_h^e$) como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_h^e &= \nabla \mathbf{u}_h^e = \mathbf{B}^e \mathbf{u}_h^e \\ \boldsymbol{\sigma}_h^e &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_h^e,\end{aligned}\tag{6.2}$$

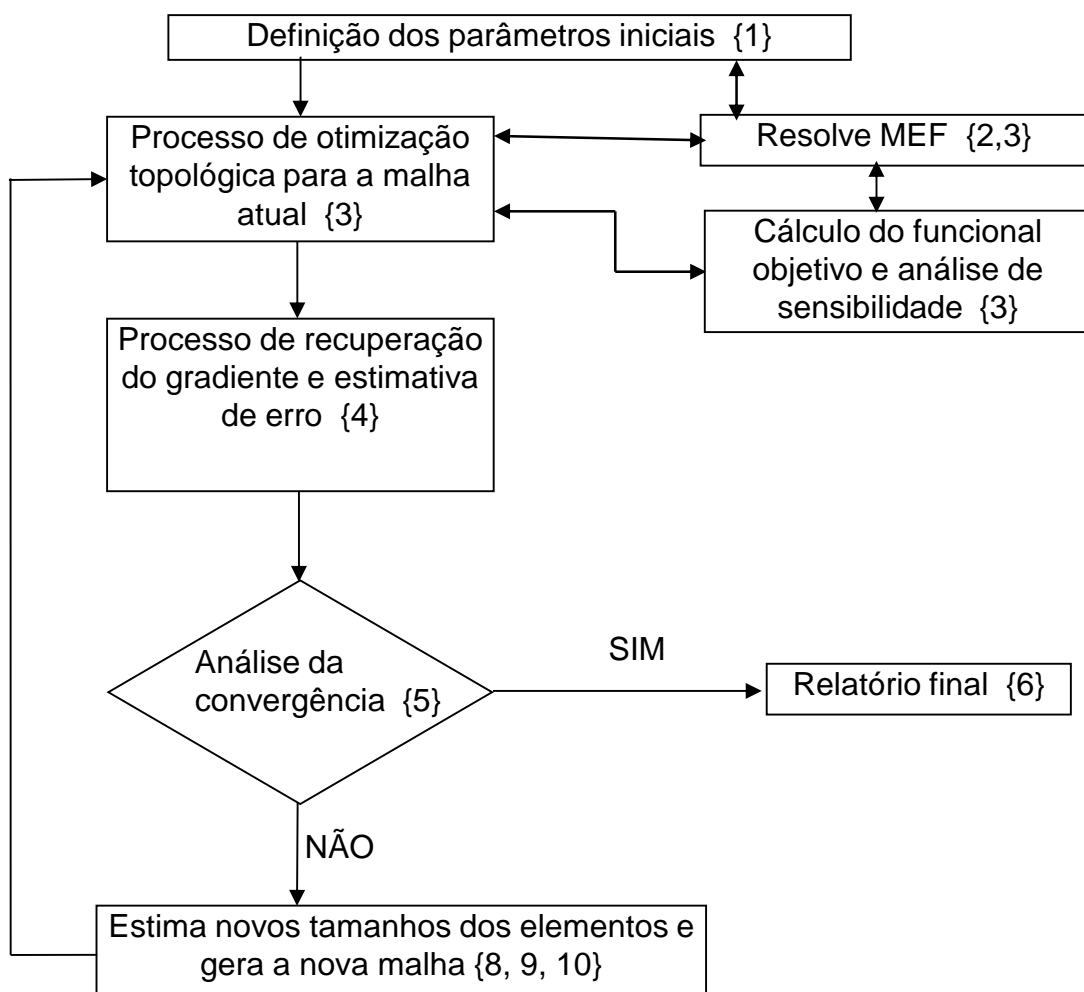
onde \mathbf{B}^e é a matriz das derivadas das funções de forma no elemento, a qual estabelece a relação entre as deformações em um ponto qualquer do elemento e o vetor de deslocamentos nodais. Ademais, \mathbf{D} é o tensor constitutivo de rigidez do material.

O processo iterativo de busca da topologia ótima pode ser resumido em uma sequência de etapas e visualizadas conforme o fluxograma na FIGURA 10. A seguir essas etapas são especificadas para uma melhor compreensão.

1. *Define os parâmetros iniciais (malha inicial, parâmetros para MEF e MLA).*
2. *Aplica MEF e, conforme as equações (6.1) e (6.2), obtêm-se os deslocamentos, deformações e tensões.*
3. *Solução do problema de otimização de topologia estrutural*
 - 3.1. *Resolve o problema de otimização não linear minimizando o funcional Lagrangeano Aumentado (5.17).*
 - 3.1.1. *Cálculo do funcional Lagrangeano Aumentado, resoluções do MEF, cálculo da direção de busca e cálculo da busca unidirecional.*
 - 3.1.2. *Cálculo da análise de sensibilidade conforme as equações (5.27), (5.28), (5.29), (5.32) e (5.44).*
 - 3.1.3. *Verifica a convergência interna do MLA, se convergiu vai para o item 4, senão:*
 - 3.1.4. *Atualiza os valores de λ^k e r^k , usando as equações (5.21) e (5.22) e retorna ao item 3.1.*
4. *Recupera o vetor gradiente e realiza o processo de estimativa de erro*
5. *Verificação de convergência.*
6. *Caso positivo, **para o processo e salva os resultados.***
7. *Caso não ocorreu a convergência.*

8. *Aplicam-se as equações (3.63) e (4.24), obtêm-se as informações sobre o tamanho padrão para os novos elementos, segundo as projeções Ch^P ou projeção QER.*
9. *Através do gerador de malha bidimensional anisotrópico (Bidimensional Anisotropic Mesh Generator - BAMG), obtém-se a nova malha.*
10. *Atualiza todas as variáveis, retorna ao passo 2 e repete todo o processo até que o algoritmo convirja para a solução aproximada.*

FIGURA 10 - FLUXOGRAMA DO PROCESSO ITERATIVO



Basicamente, o algoritmo acima apresenta como referência três focos principais para resolução do problema. O primeiro é a aplicação do Método dos Elementos Finitos para solução do problema estrutural. O segundo trata da aplicação de um algoritmo de otimização não linear (nesse caso, o Método do Lagrangeano Aumentado) para obtenção do campo das densidades ótimo (topologia ótima). O terceiro foco está relacionado à adaptatividade da malha (pela definição

dos novos tamanhos locais dos elementos) buscando garantir uma melhor qualidade da solução numérica por MEF. O resultado final é uma estrutura com topologia ótima, onde é usado um processo de refino de malha adaptativa h-isotrópico.

6.3 RESULTADOS

Os objetivos principais desta seção são: *i)* validar a proposta de metodologia de refino de malha descrita no capítulo 4, através da comparação com a proposta apresentada por outros autores e descrita na seção 3.5.1. *ii)* aplicar e comparar as metodologias em problemas estruturais de otimização em topologia. Os resultados obtidos são apresentados a seguir.

6.3.1 Validação da técnica de refino em problemas escalares

Na seção 3.5.1 apresentam-se os conceitos para projeção de malha segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), definido como projeção (Ch^P), onde é usada a equação (3.63), para obter o tamanho dos novos elementos. No capítulo 4 é apresentada uma nova proposta para o tamanho dos novos elementos usando a equação (4.24), metodologia proposta para este trabalho e definida como projeção QER (*Quadratic Elementary Recovery*). As metodologias são aplicadas em problemas escalares, cujas soluções analíticas são conhecidas, objetivando a validação e comparação das mesmas. É usado o gerador BAMG (HECHT, 2006), o qual permite a geração automática de malhas triangulares 2D.

a) Problema Escalar I

Seja um problema linear de condução de calor definido sobre o domínio Ω e submetido unicamente a condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Sua forma forte pode ser posta como (REDDY, 2006)

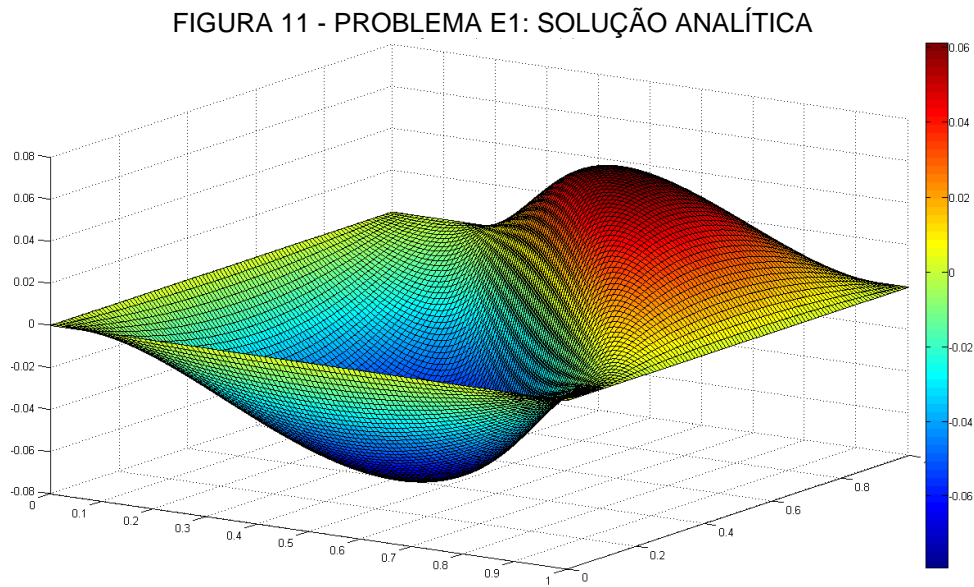
$$\begin{aligned} -\nabla(k\nabla T) &= f && \text{em } \Omega \\ T &= 0 && \text{em } \Gamma_T, \end{aligned} \tag{6.3}$$

onde T é o campo de temperaturas, k a matriz de condutividade térmica, f a fonte interna de calor, Γ_T o contorno de Dirichlet e ∇ o operador gradiente.

Nesse exemplo, considera-se um domínio $\Omega = [0, 1]^2$ e a fonte interna de calor aplicada é selecionada tal que a solução analítica é dada por (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000), como

$$T(x,y) = x(1-x)y(1-y) \arctan[\alpha(\rho - \rho_0)], \quad (6.4)$$

sendo $\rho = \frac{(x+y)}{\sqrt{2}}$, $\rho_0 = 0,8$ e $\alpha = 20$. Essa solução pode ser visualizada na FIGURA 11.



Neste problema, a malha inicial quase-uniforme foi gerada com 512 nós e 942 elementos, ou seja, 512 graus de liberdade. O erro global, ao final da primeira iteração, utilizando essa malha, foi de 18,61% e o índice de efetividade de 1,07.

Considerando um erro admissível de 5% são realizadas 5 iterações. Na FIGURA 12 apresenta-se a malha final que possui 3084 graus de liberdade e erro global em 5,06 %. Na FIGURA 14, observam-se as comparações entre o erro estimado, o erro verdadeiro, e o índice de efetividade (1,026), conforme projeto de malha via Ch^P.

Aplicam-se os mesmos conceitos, altera-se apenas o tamanho do novo elemento. Ou seja, o tamanho do elemento leva em consideração a recuperação do erro usando a equação (4.24). Considerando o erro admissível de 5% são realizadas 5 iterações. Na FIGURA 13 apresentam-se a malha final com 2570 graus de liberdade (um grau de liberdade por nó) e os erros elementares, os quais resultam em um erro global em 5,16 %. Na FIGURA 15, são observadas as comparações entre os erros e o índice de efetividade (1,024), equação (3.35), conforme projeto de malha via QER, sendo que cada ponto na figura representa uma iteração.

FIGURA 12 – PROBLEMA E1:– MALHA FINAL (a) E ERRO RELATIVO (b) NA 5ª ITERAÇÃO DO PROJETO DE MALHA VIA Ch^p

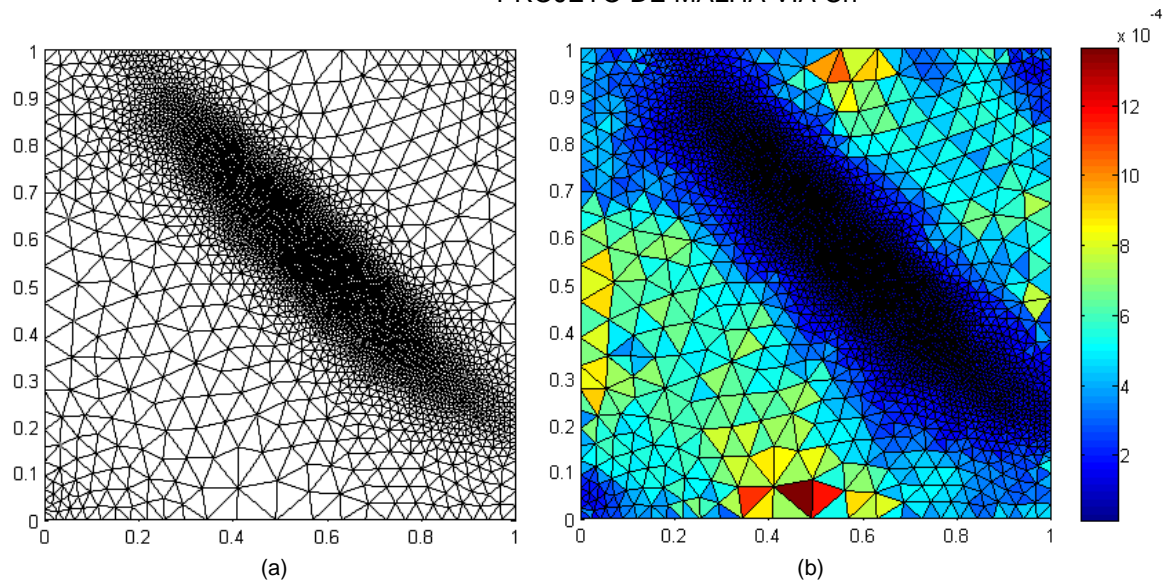


FIGURA 13 - PROBLEMA E1: MALHA FINAL (a) E ERRO RELATIVO (b) NA 5ª ITERAÇÃO DO PROJETO DE MALHA VIA QER

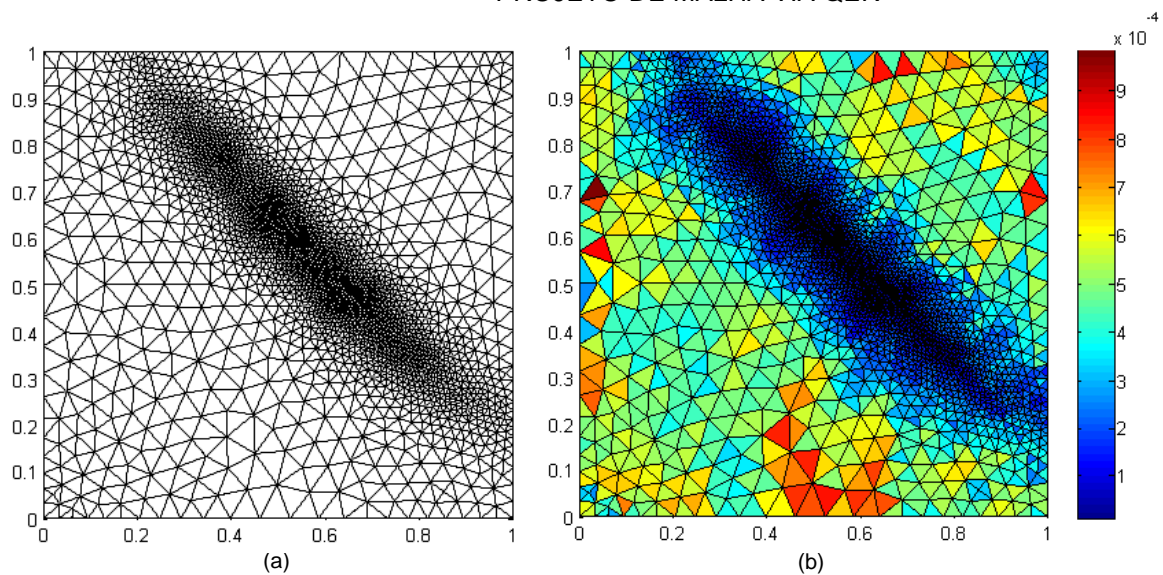


FIGURA 14 - PROBLEMA E1: COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO ESTIMADO E O ERRO VERDADEIRO (a), COMPARAÇÃO ENTRE O ÍNDICE DE EFETIVIDADE E A REFERÊNCIA DE EFETIVIDADE (b) NA 5ª ITERAÇÃO DO PROJETO DE MALHA VIA Ch^P

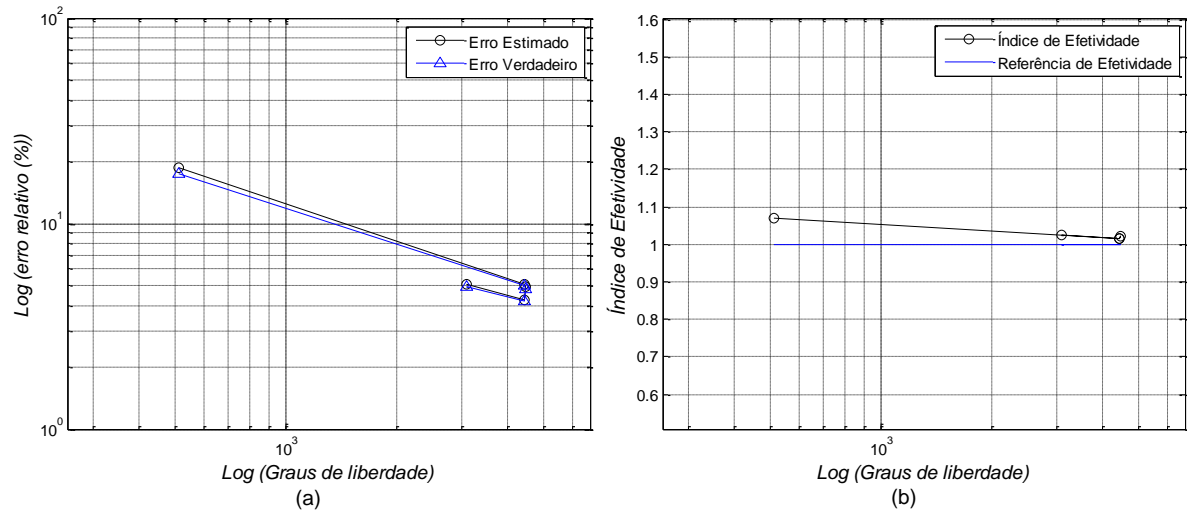
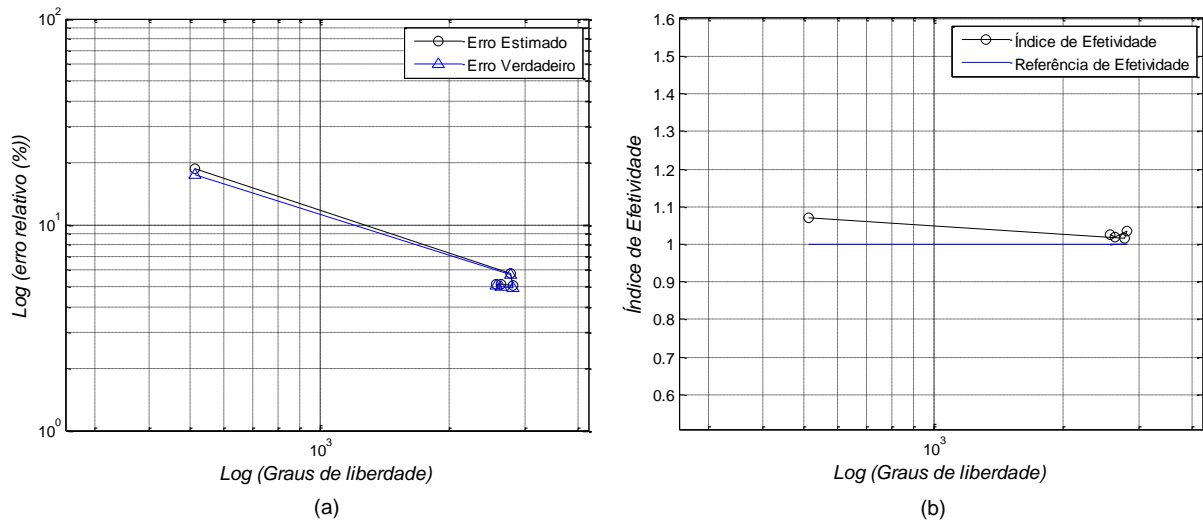
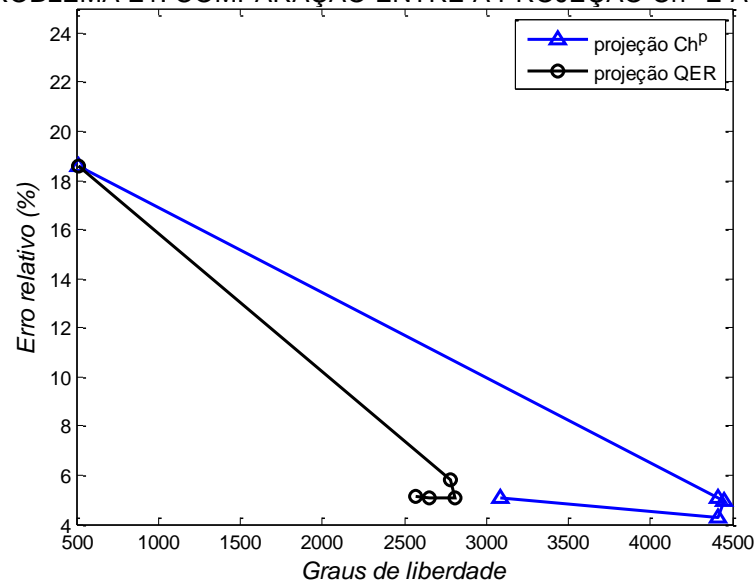


FIGURA 15 - PROBLEMA E1: COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO ESTIMADO E O ERRO VERDADEIRO (a), COMPARAÇÃO ENTRE O ÍNDICE DE EFETIVIDADE E A REFERÊNCIA DE EFETIVIDADE (b) NA 5ª ITERAÇÃO DO PROJETO DE MALHA VIA QER



Para a projeção QER, embora existam mais elementos com erros maiores na FIGURA 13 em comparação com a FIGURA 12, mesmo assim o índice de efetividade ficou mais próximo da unidade que é o ideal.

FIGURA 16 - PROBLEMA E1: COMPARAÇÃO ENTRE A PROJEÇÃO Ch^P E A PROJEÇÃO QER

Pela FIGURA 16 pode-se observar que o processo de adaptatividade proposto neste trabalho possui taxa de convergência maior para este problema. Isso se traduz através de outra informação importante, onde o número total de graus de liberdade obtido via projeção QER é 83,33 % da projeção Ch^P . Para o erro relativo e o índice de efetividade houve pouca diferença entre as duas projeções.

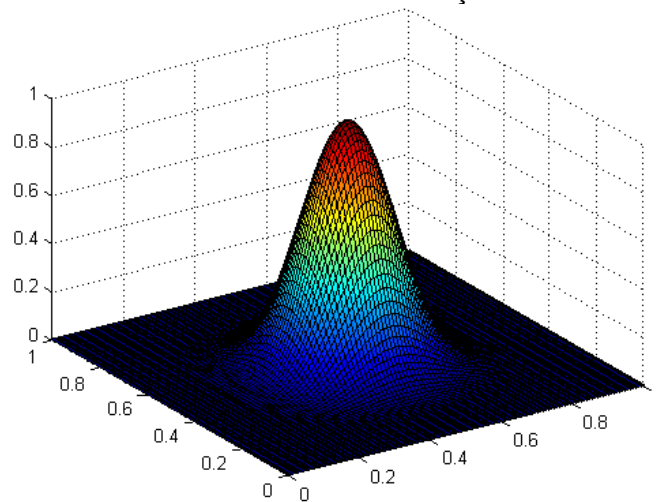
b) Problema Escalar II

Um segundo problema com vistas à validação da técnica de refino proposta se refere ao problema térmico, pode ser posto através do mesmo problema de valores no contorno que o exemplo anterior, equação (6.3). Nesse caso, considera-se o domínio $\Omega=[0,1]^2$ e a fonte interna de calor aplicada é tal que a solução analítica é dada por (MITCHELL, 2013)

$$T(x,y) = 2^{4a} x^a (1-x)^a y^a (1-y)^a, \quad (6.5)$$

sendo $a = 10$. A FIGURA 17 apresenta uma visualização dessa solução analítica. Neste trabalho, esse problema é definido como problema E2.

FIGURA 17 - PROBLEMA E2: SOLUÇÃO ANALÍTICA



De maneira semelhante ao problema escalar I, apresenta-se o resultado considerando os mesmos conceitos. Ou seja, o tamanho do novo elemento é baseado nas duas abordagens. A malha inicial foi gerada com 512 nós e 942 elementos. Ao final da primeira iteração, com esta malha o erro global é de 18,20% e o índice de efetividade de 1,05, considerando erro admissível prescrito de 5%, e efetuando 5 iterações no processo de refino adaptativo isotrópico. Na FIGURA 18 apresenta-se a malha para aplicação do MEF com 1672 graus de liberdade e erro global em 4,95 %. De maneira análoga ao problema E1, a FIGURA 20 mostra os índices de efetividade (cujo valor na malha final é 1,017), além de comparações entre os erros.

De maneira semelhante ao problema escalar I, a FIGURA 19 e a FIGURA 21 apresentam os resultados considerando os mesmos conceitos, no entanto a abordagem para o tamanho do elemento para malha isotrópica muda para a projeção QER, conforme equação (4.24). A malha final para a solução aproximada com 1678 graus de liberdade, erro global em 4,94 % e índice de efetividade final 1,012.

FIGURA 18 - PROBLEMA E2: MALHA FINAL (a) ERRO RELATIVO (b) NA 5ª ITERAÇÃO DO PROJETO DE MALHA VIA Ch^p

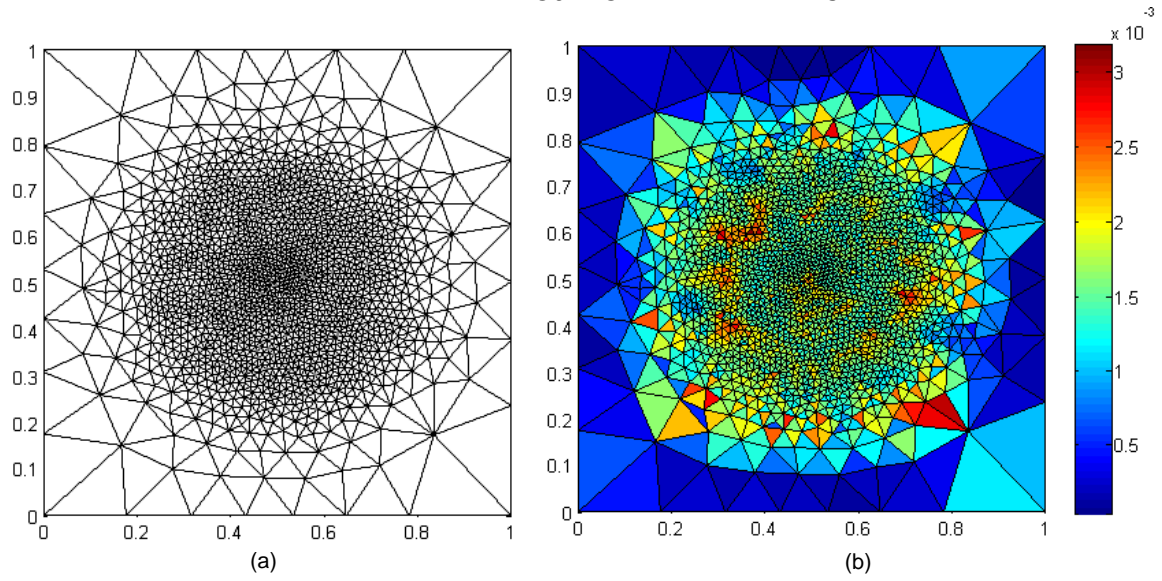


FIGURA 19 - PROBLEMA E2: MALHA FINAL (a) ERRO RELATIVO (b) NA 5ª ITERAÇÃO DO PROJETO DE MALHA VIA QER

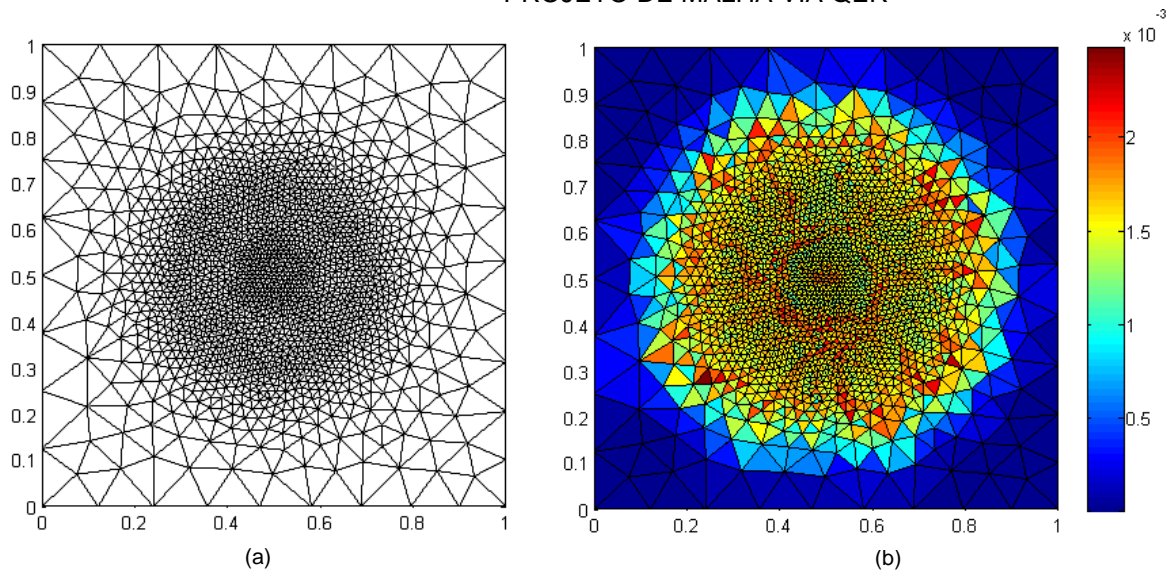


FIGURA 20 - PROBLEMA E2: COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO ESTIMADO E O ERRO VERDADEIRO (a), COMPARAÇÃO ENTRE O ÍNDICE DE EFETIVIDADE E A REFERÊNCIA DE EFETIVIDADE (b) PROJETO DE MALHA VIA Ch^p

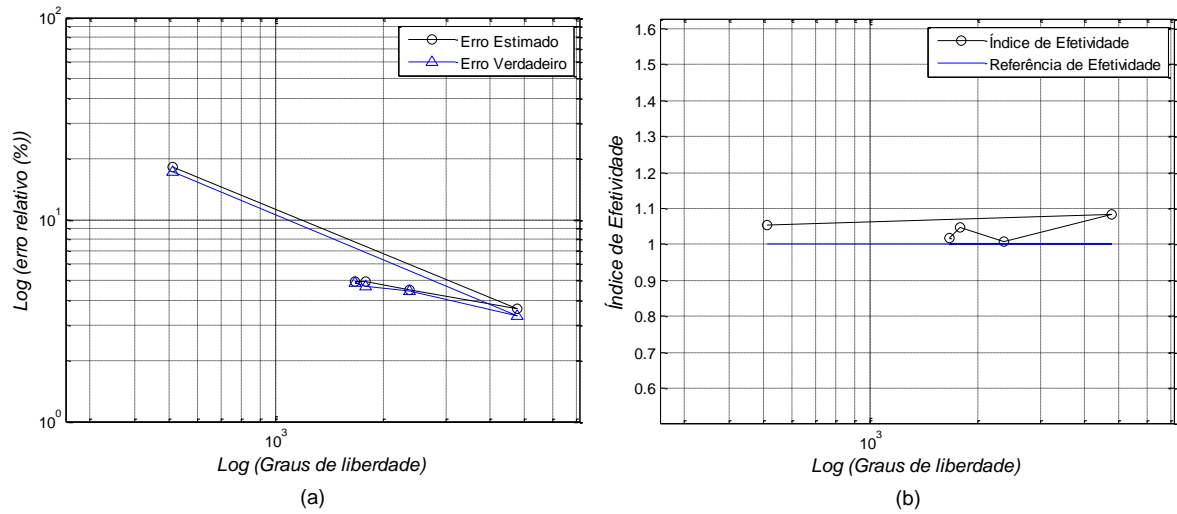


FIGURA 21 - PROBLEMA E2: COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO ESTIMADO E O ERRO VERDADEIRO (a), COMPARAÇÃO ENTRE O ÍNDICE DE EFETIVIDADE E A REFERÊNCIA DE EFETIVIDADE (b) PROJETO DE MALHA VIA QER

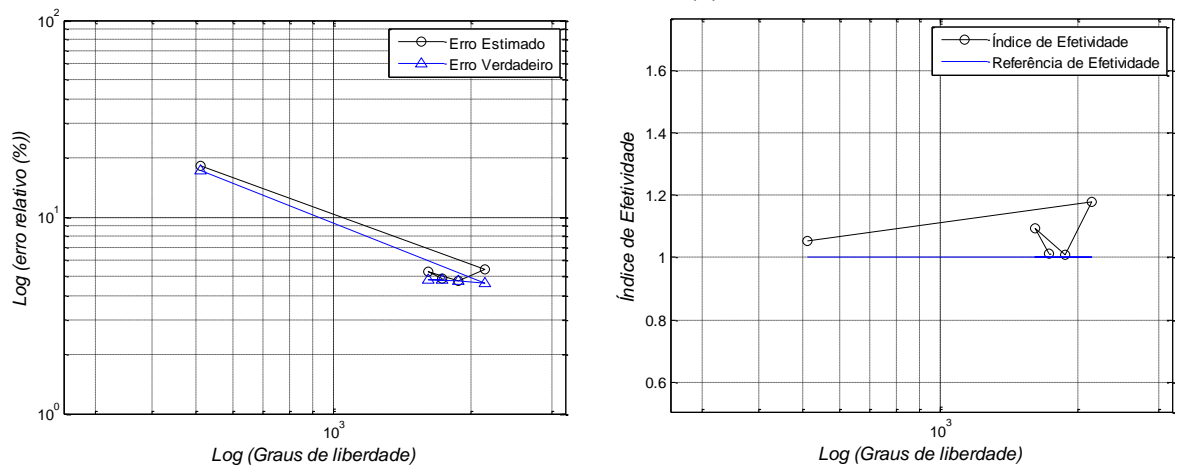
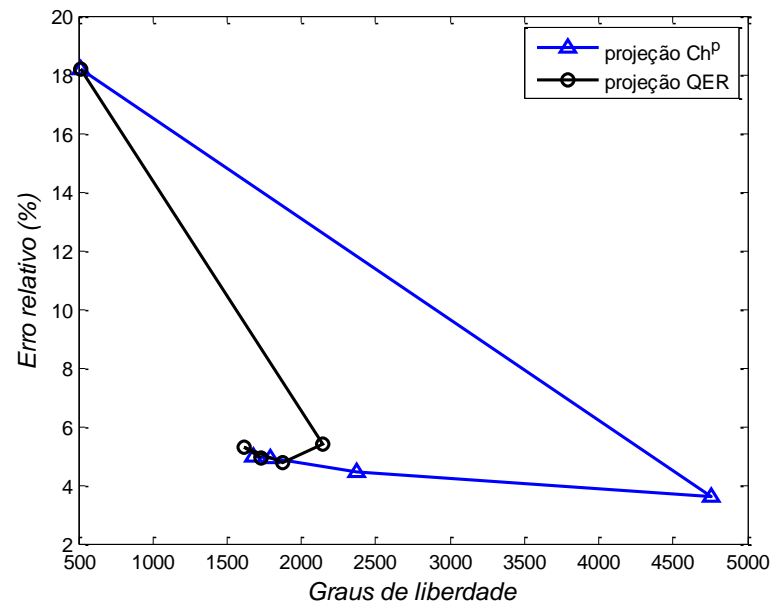


FIGURA 22 - PROBLEMA E2: COMPARAÇÃO ENTRE A PROJEÇÃO Ch^P E A PROJEÇÃO QER

Pela FIGURA 22 pode-se observar que o processo de refino proposto neste trabalho possui uma taxa de convergência claramente superior ao tradicional método Ch^P, também para este problema. Outra informação importante diz respeito à maneira como as metodologias convergem para o número de graus de liberdade ideal.

6.3.2 Validação em problemas vetoriais

De maneira análoga ao problema escalar com objetivo de validar os conceitos discutidos até aqui, aplicam-se os mesmos conceitos da seção 3.5.1 e equação (3.63) para projeção de malha segundo Zienkiewicz e Taylor (2000). Também são aplicados os conceitos baseados nas duas metodologias, para a malha isotrópica, em dois problemas de elasticidade plana.

As equações que governam um problema de elasticidade plana em EPT, na sua forma forte são postas como (REDDY, 2006)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y &= 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde f_x e f_y são as componentes de carregamento de domínio por unidade de volume nas direções x , e y , respectivamente. As condições de contorno são do tipo Dirichlet homogêneas.

a) Problema Vetorial I

Considerando um problema proposto com as equações de equilíbrio (6.6) e aplicando o carregamento com solução conhecida, dada pela equação (6.4), em ambas as direções, caracteriza-se o problema vetorial. Definindo-o como problema V1, apresentou os resultados que podem ser observados na FIGURA 23 e na FIGURA 24. Os parâmetros para o problema foram os mesmos, foram necessárias 5 iterações e erro máximo admissível foi de 5%. A malha inicial foi gerada com 512 nós e 942 elementos, 1024 graus de liberdade, o erro global é de 18,88% e índice de efetividade 1,12.

Ao final do processo iterativo do refino isotrópico adaptativo, é apresentada a malha final para a solução aproximada do MEF, com 4550 graus de liberdade e erro global em 5,29%, índice de efetividade 1,04, usando a projeção de malha via QER.

FIGURA 23 - PROBLEMA V1: Ch^P (a) e QER (b) PROJEÇÃO DA MALHA FINAL

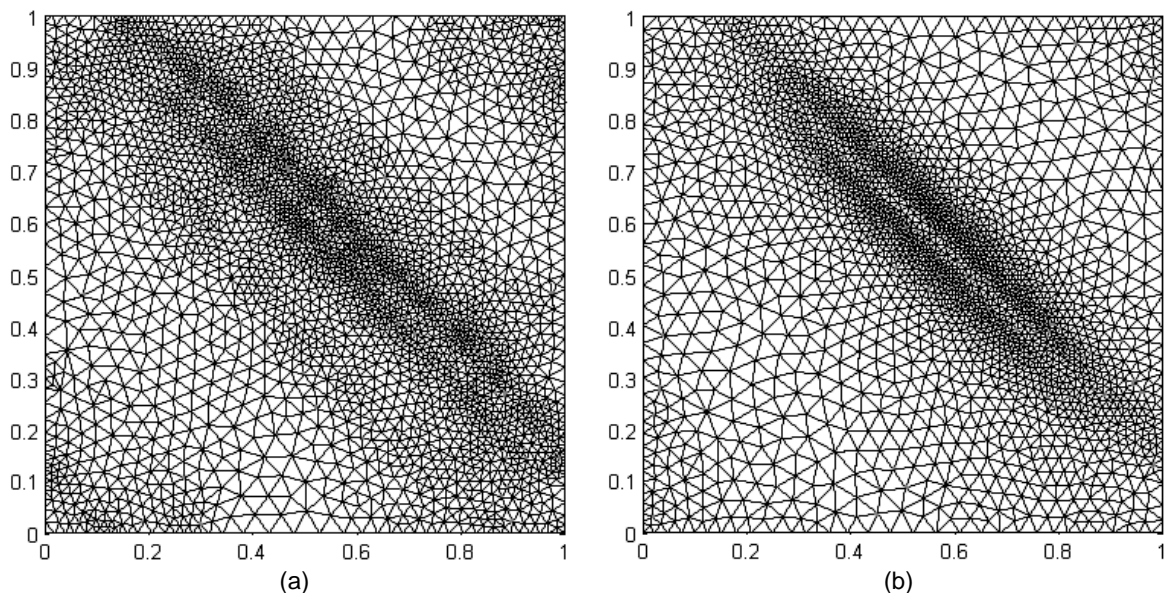
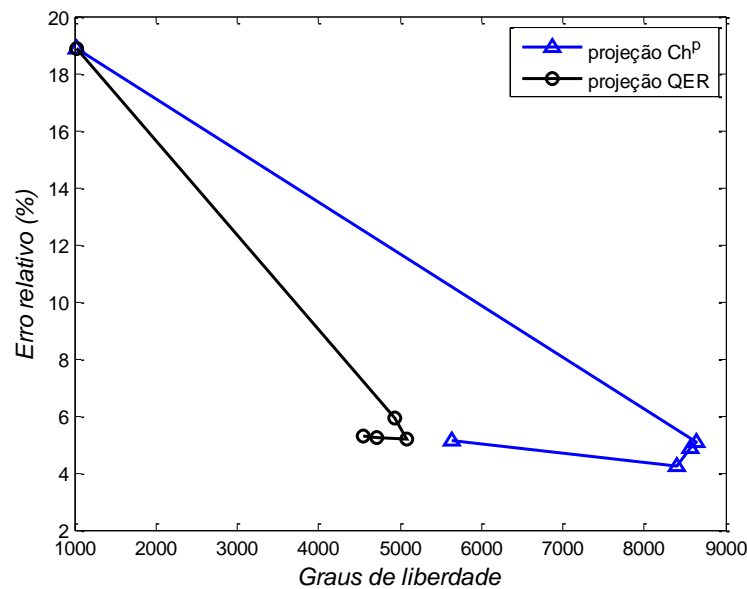


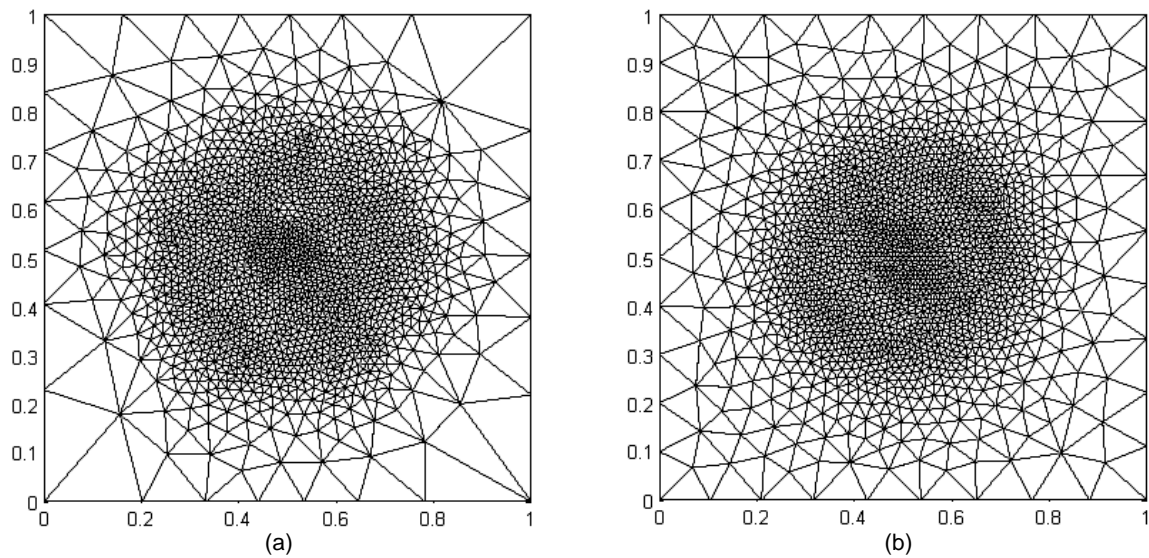
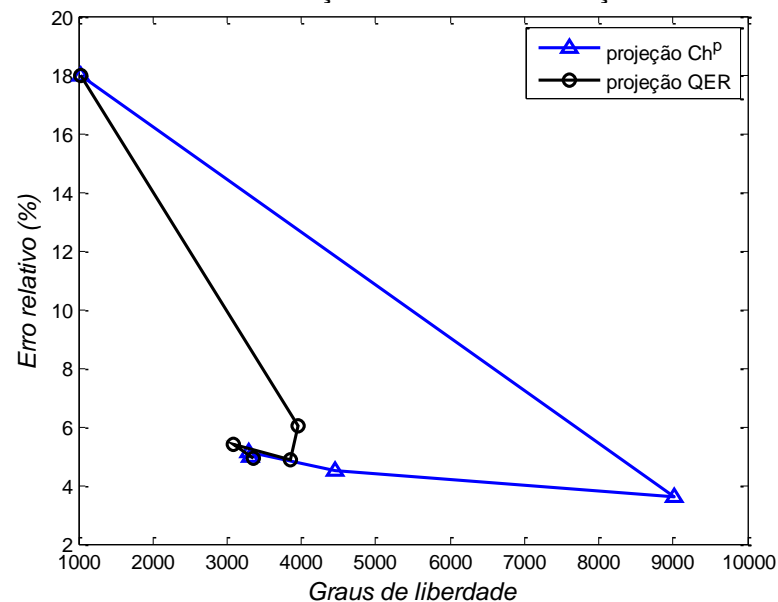
FIGURA 24 – PROBLEMA V1: COMPARAÇÃO ENTRE A PROJEÇÃO Ch^P E A PROJEÇÃO QER

b) Problema Vetorial II

O segundo problema em EPT satisfaz as equações de equilíbrio (6.6) e aplica-se o carregamento com solução conhecida, dada pela equação (6.5), em ambas as direções, definido como problema V2.

Os parâmetros para o processo de refino foram os mesmos: foi executado em 5 iterações e o erro máximo admissível é de 5%. A malha inicial foi gerada com 512 nós e 942 elementos, 1024 graus de liberdade, o erro global é de 17,98% e índice de efetividade 1,05.

Ao final dos processos iterativos do refino isotrópico adaptativo, os resultados podem ser visualizados na FIGURA 25. A malha final para a solução aproximada do MEF, com 3356 graus de liberdade e erro global em 4,94%, índice de efetividade 1,01. Informações segundo a projeção de novo elemento via QER, sendo que para a projeção Ch^P , são muito próximas com 3322 graus de liberdade e erro global em 4,98%, índice de efetividade 1,01.

FIGURA 25 - PROBLEMA V2: Ch^P , (a) e QER (b) PROJEÇÃO DA MALHA FINALFIGURA 26 - PROBLEMA V2: COMPARAÇÃO ENTRE A PROJEÇÃO Ch^P E A PROJEÇÃO QER

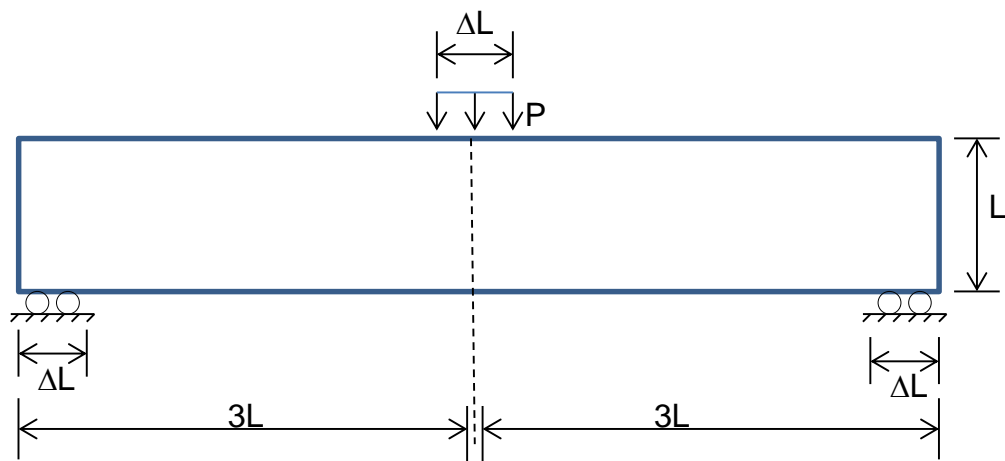
Pela FIGURA 26, de modo análogo ao problema vetorial I, pode-se observar que o tamanho do elemento proposto no trabalho tem sua taxa de convergência maior para este problema. Outra informação importante diz respeito aos graus de liberdade, o erro relativo e o índice de efetividade: houve pouca diferença entre as duas projeções. Pode-se observar também que a projeção Ch^P aumenta muito os graus de liberdade e depois vai reduzindo de forma a encontrar o ideal. Enquanto que a projeção QER demonstra maior precisão na questão de graus de liberdade. Isso pode ser considerado para estes dois problemas, tanto para o problema de condução térmica como para o problema de estado plano de tensões.

6.3.3 Resultados com mínima flexibilidade com restrição em massa

Esta subseção se destina à aplicação de ambas as metodologias em problemas estruturais. O domínio é definido para os problemas de Otimização em Topologia Contínua, usando o problema de mínima flexibilidade com restrições em massa. O gerador de malha utilizado é o BAMG, (HECHT, 2006). De maneira análoga aos problemas para validação nas seções anteriores, nesta seção são aplicados os conceitos das duas abordagens.

6.3.3.1 Viga MBB

FIGURA 27 - VIGA LONGA BI APOIADA COM CARREGAMENTO TRANSVERSAL CENTRAL

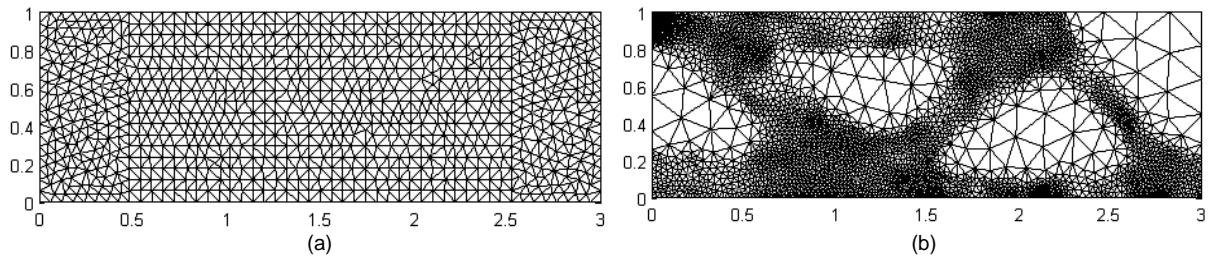


Este é um problema clássico de otimização de topologia estrutural. Trata-se de uma estrutura em EPT biapoiada e submetida a carregamento transversal na região central, conforme FIGURA 27. Em virtude da simetria, é modelada somente metade da estrutura (à direita), sendo que os parâmetros geométricos e materiais do modelo são:

$$\begin{array}{lll} \Delta L = 0,2 \text{ m} & L = 1,0 \text{ m} & E = 21,0 \text{ MPa} \\ \nu = 0,3 & P = 2,0 \text{ kN} & r_m = 0,95 \\ r_p = 0,002 \text{ m}^2. \end{array}$$

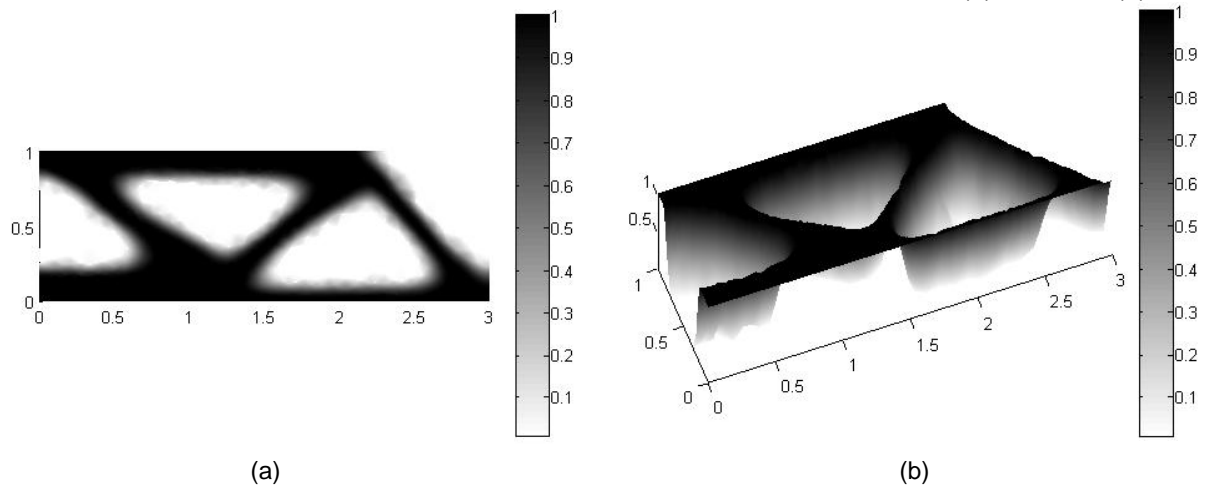
Os resultados podem ser visualizados na sequência, sendo que a restrição da massa é de 1,5 e erro global prescrito de 5%.

FIGURA 28 - VIGA MBB: MALHA INICIAL (a) E MALHA FINAL ADAPTADA (b)



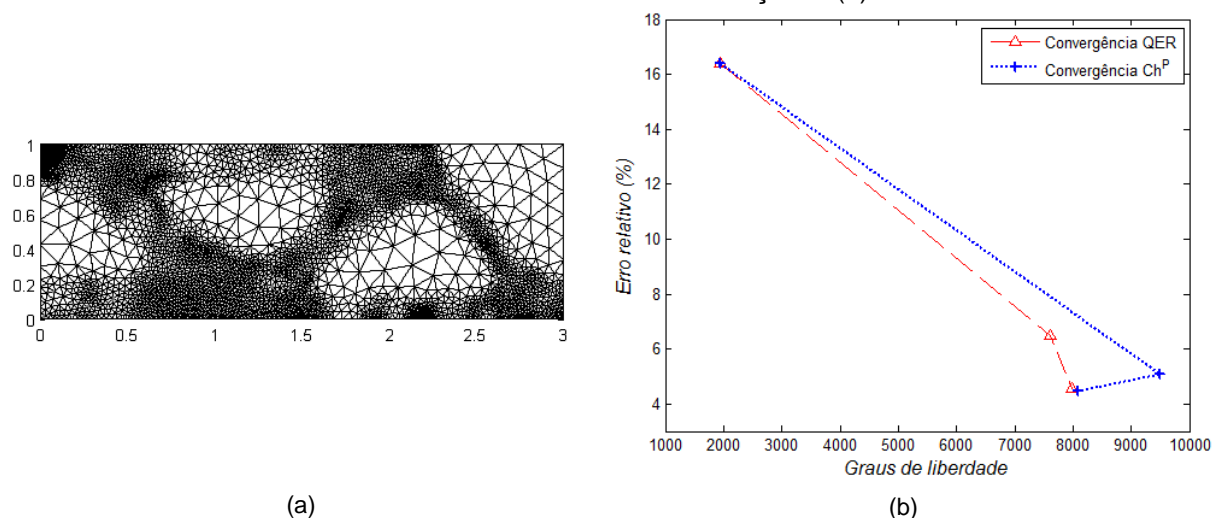
Foi utilizada a abordagem QER e na FIGURA 28 é apresentada a malha inicial com 968 vértices (nós) e 1936 graus de liberdade, além da malha final com 3988 nós, 7976 graus de liberdade. A FIGURA 29 apresenta a topologia final com massa total de 1,5013. Em duas iterações adaptativas, a malha final apresentou um erro global de 4,57%.

FIGURA 29 - VIGA MBB: CAMPO DAS DENSIDADES FINAL PLANIFICADA (a) E EM 3D (b)

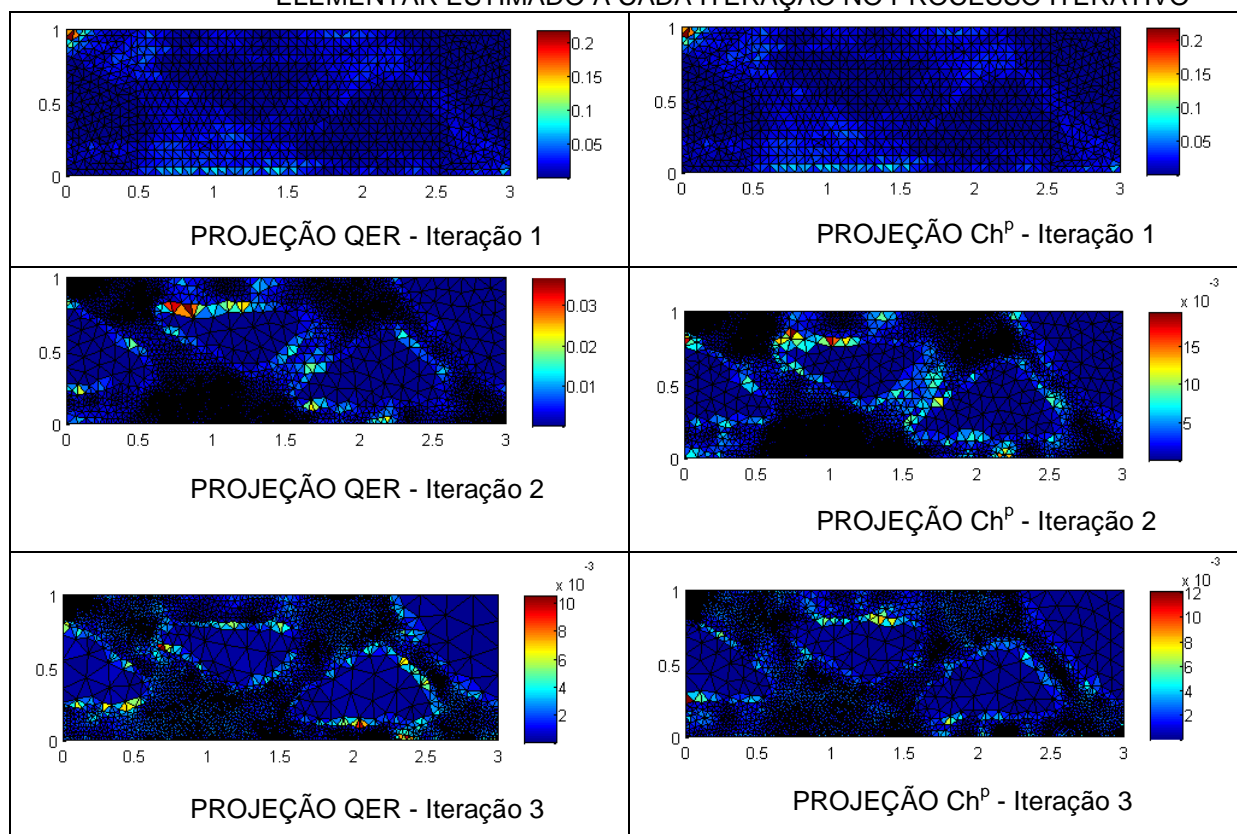


Aplicam-se os conceitos da seção 3.5.1 e equação (3.63) para projeção de malha segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), (método Ch^P). A FIGURA 30 apresenta a malha final com 8082 graus de liberdade, e massa de 1,5016 com 4,49% de erro global.

FIGURA 30 - VIGA MBB: MALHA FINAL DA PROJEÇÃO DE MALHA VIA Ch^P (a) COMPARAÇÃO ENTRE PROJEÇÕES (b)



QUADRO 1 - VIGA MBB: USANDO AS PROJEÇÕES Ch^P E QER, COMPARAÇÃO DO ERRO ELEMENTAR ESTIMADO A CADA ITERAÇÃO NO PROCESSO ITERATIVO



O comportamento da malha em cada iteração, o erro global estimado em cada projeção bem como os parâmetros das malhas são apresentados na TABELA 1.

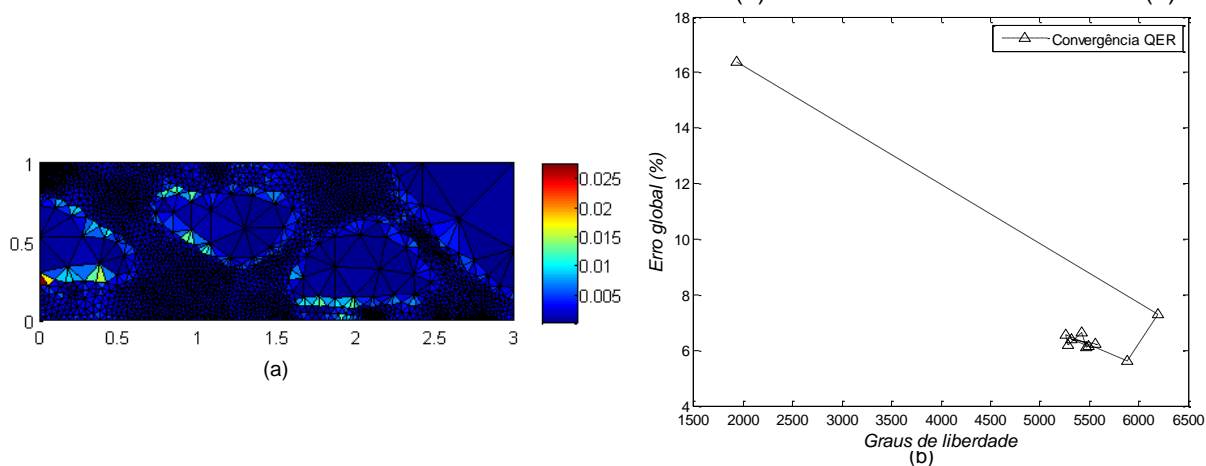
TABELA 1 – VIGA MBB: INFORMAÇÃO DE CADA ITERAÇÃO NO PROCESSO ADAPTATIVO

ITERAÇÃO	PROJEÇÃO	Nº NÓS	Nº ELEMENTOS	GRAUS DE LIBERDADE	ERRO GLOBAL (%)
malha inicial	Iguais	968	1800	1936	16,40
Iteração 1	QER	3805	7344	7610	6,47
Iteração 1	Ch ^P	4745	9164	9490	5,09
Iteração 2	QER	3988	7635	7976	4,57
Iteração 2	Ch ^P	4041	7731	8082	4,49

Outras informações podem ser visualizadas no QUADRO 1. O mesmo apresenta o comportamento do erro elementar para cada projeção em cada iteração.

Outro resultado importante diz respeito à restrição do tamanho para o novo elemento isotrópico. Na FIGURA 31 apresenta-se uma malha final com 2783 nós, 5556 graus de liberdade. A diferença entre esse resultado e o anterior está no fato do valor da restrição do tamanho dos elementos da próxima malha isotrópica. Em 10 iterações adaptativas, apresenta uma topologia final com 1,5218 de massa e erro global de 6.21%. Observa-se, também, que, a partir da quarta iteração, os graus de liberdade pouco se alteram; já o erro global sofre oscilação.

FIGURA 31 - VIGA MBB: ERRO RELATIVO ELEMENTAR (a) E TAXA DE CONVERGÊNCIA (b)



Pode-se dizer que o novo tamanho de elementos da malha isotrópica deve ser restringido, evitando o risco de se ter uma malha com elementos distorcidos prejudicando os resultados numéricos.

6.3.3.2 Placa retangular com furo quadrado

Este problema tem como modelo de análise uma estrutura plana retangular, com furo quadrado central, em EPT e submetido a um carregamento de tração uniaxial em sua região intermediária (FIGURA 32). A restrição da massa é de 2,1 e erro global prescrito de 3%.

Os parâmetros geométricos e materiais do modelo são:

$$\begin{array}{lll} E = 100,0 \text{ MPa} & \nu = 0,3 & L = 1,0 \text{ m} \\ t = 1,0 \text{ N} & r_m = 0,95 & r_p = 0,03 \text{ m}^2 \end{array}$$

FIGURA 32 - PLACA RETANGULAR COM FURO QUADRADO NO CENTRO

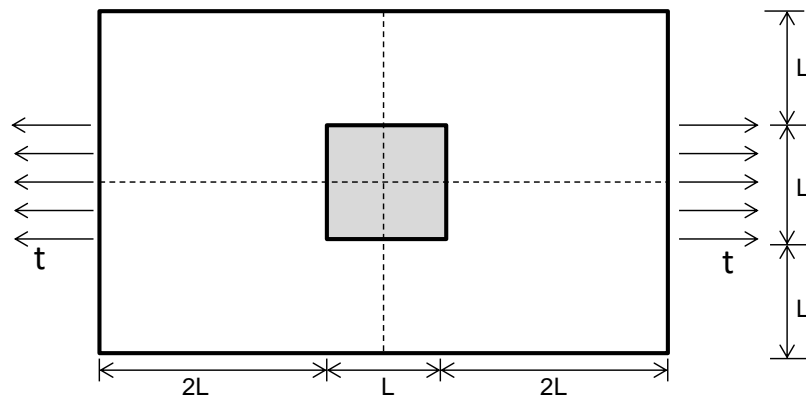
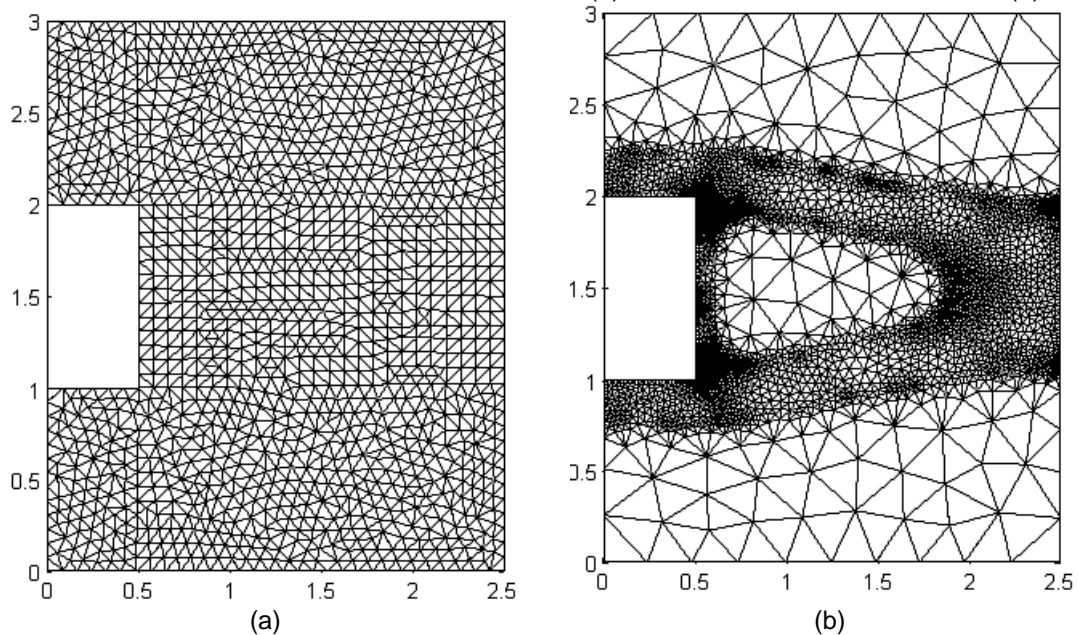
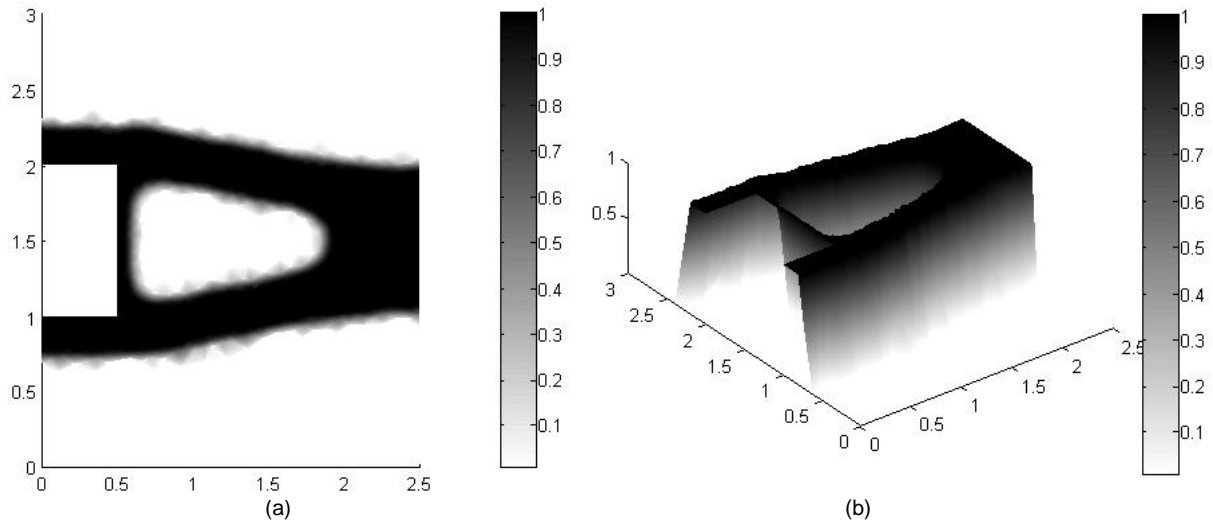


FIGURA 33 - PLACA FURO: MALHA INICIAL (a) E MALHA FINAL ISOTRÓPICA (b)



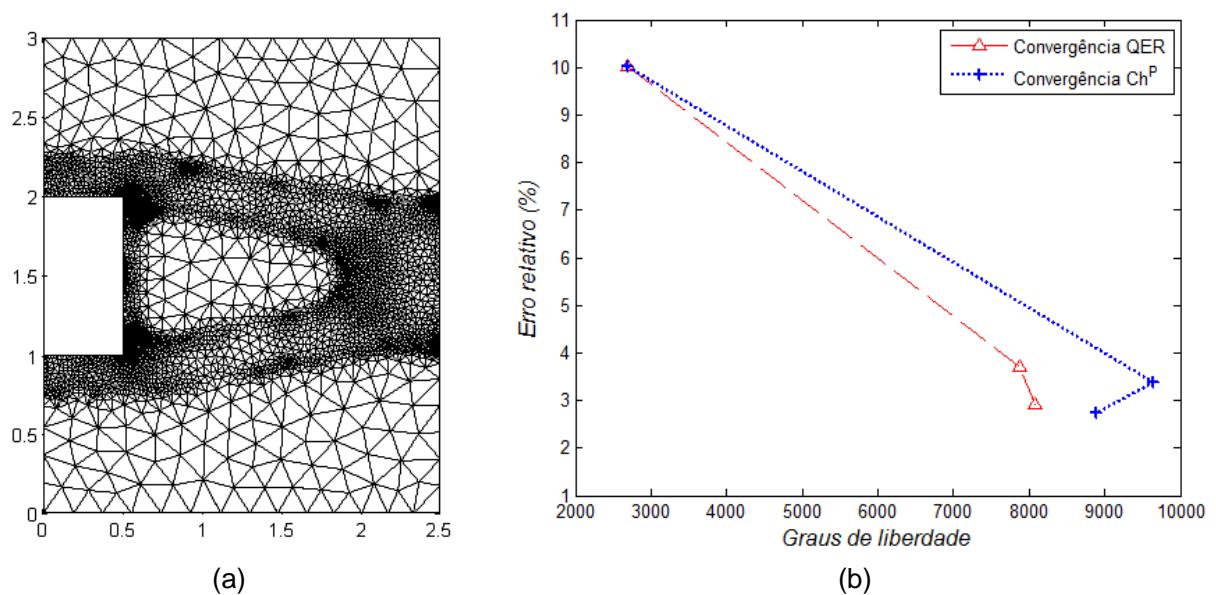
A FIGURA 33 apresenta a malha inicial com 2692 graus de liberdade, além da malha final com 8072 graus de liberdade, da projeção QER. A FIGURA 34 apresenta a topologia final com massa de 2,0984 e 2,92% de erro global.

FIGURA 34 - PLACA FURO: CAMPO DAS DENSIDADES FINAL – PLANIFICADA (a) E EM 3D (b)



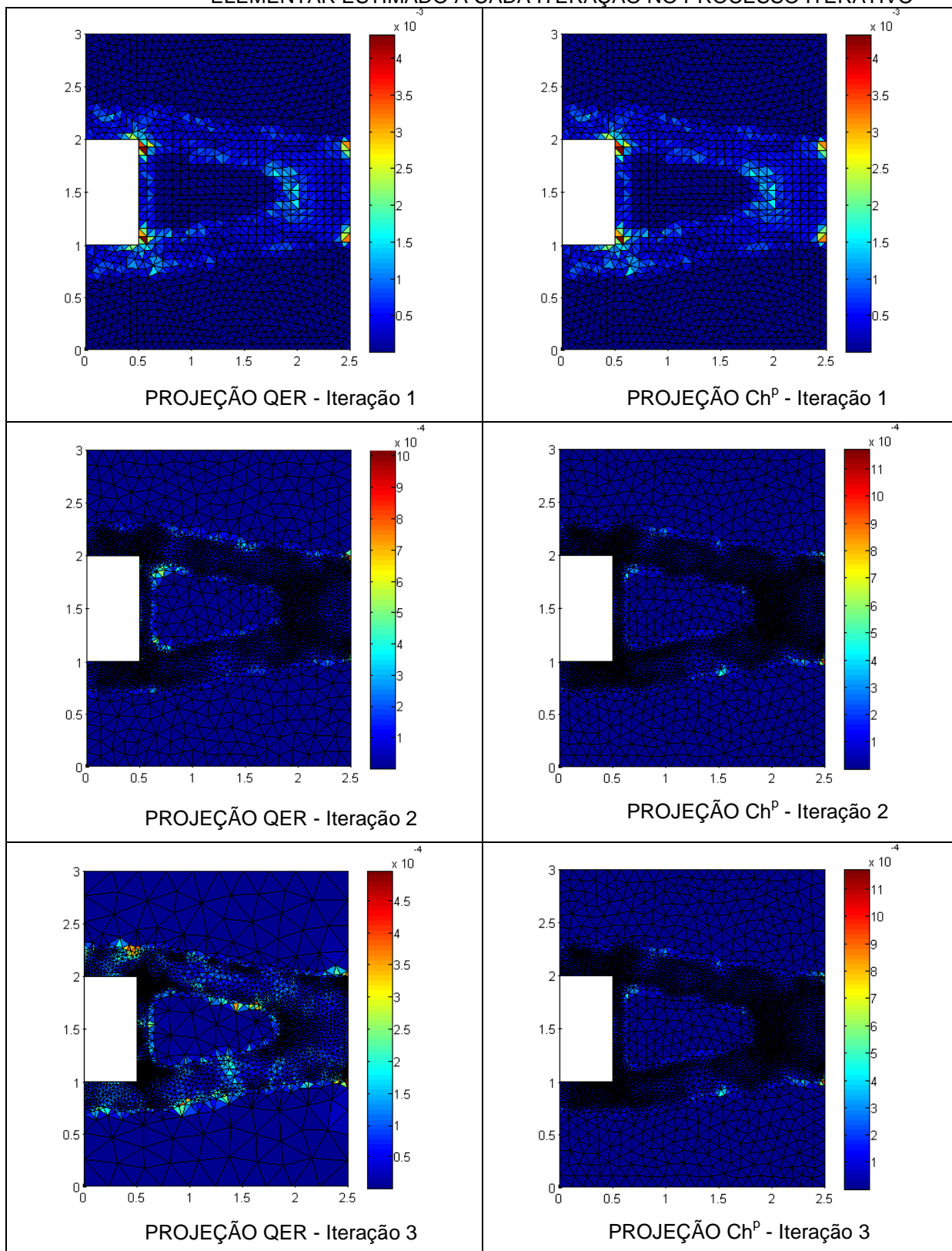
Aplicam-se também os conceitos da seção 3.5.1 e equação (3.63), para projeção Ch^P . Nesse caso, o erro prescrito foi atingido em duas iterações, a malha final possui 8896 graus de liberdade e apresentou massa 2,0988 e o erro global de 2,73% (FIGURA 35). Observa-se também que a taxa de convergência da projeção QER é maior em comparação à projeção Ch^P , para este problema.

FIGURA 35 - PLACA FURO: MALHA FINAL DA PROJEÇÃO DE MALHA VIA Ch^P (a) E COMPARAÇÃO ENTRE PROJEÇÕES (b)



Outras informações podem ser visualizadas no QUADRO 2. O mesmo apresenta o comportamento do erro elementar para cada projeção em cada iteração.

QUADRO 2 - PLACA FURO: USANDO AS PROJEÇÕES Ch^P E QER, COMPARAÇÃO DO ERRO ELEMENTAR ESTIMADO A CADA ITERAÇÃO NO PROCESSO ITERATIVO



De maneira análoga ao problema de viga MBB, a TABELA 2 apresenta o comportamento da malha para cada iteração, comparando o erro global estimado em cada projeção bem como as malhas para aplicação do MEF.

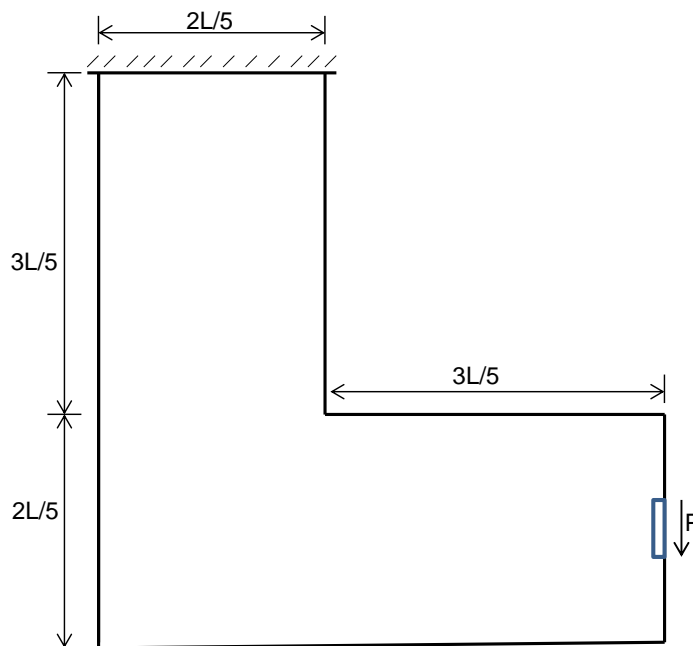
TABELA 2 - PLACA FURO: INFORMAÇÃO DE CADA ITERAÇÃO NO PROCESSO ADAPTATIVO					
ITERAÇÃO	PROJEÇÃO	Nº NÓS	Nº ELEMENTOS	GRAUS DE LIBERDADE	ERRO GLOBAL (%)
malha inicial	Iguais	1346	2539	2692	10,03
Iteração 1	QER	3938	7668	7876	3,71
	Ch ^P	4821	9399	9642	3,39
Iteração 2	QER	4036	7795	8072	2,92
	Ch ^P	4448	8574	8896	2,73

6.3.3.3 Estrutura em formato L

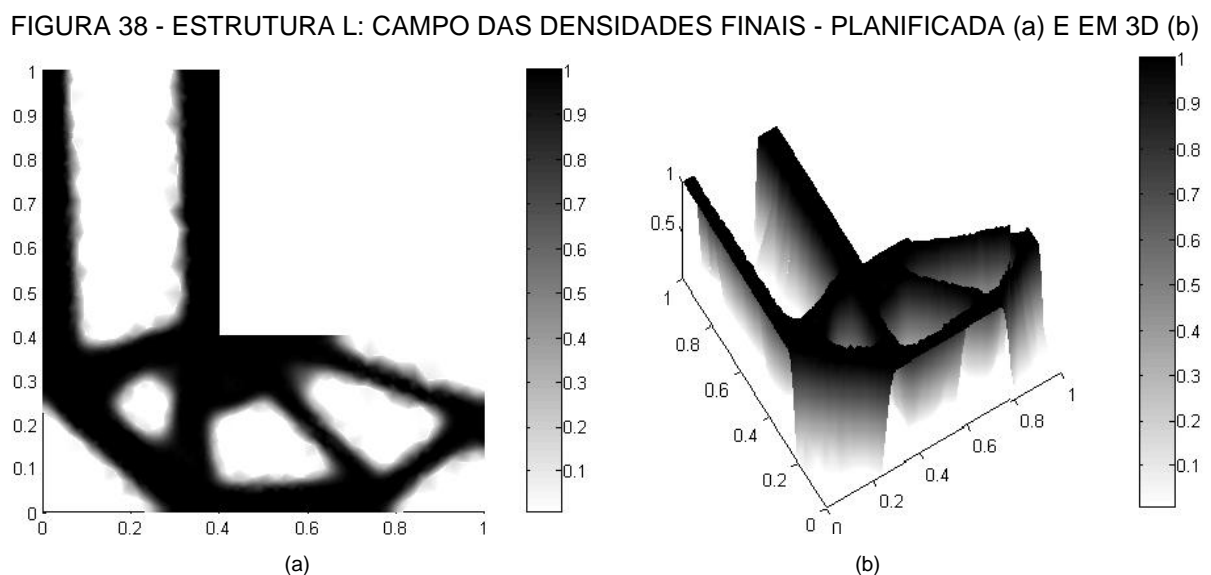
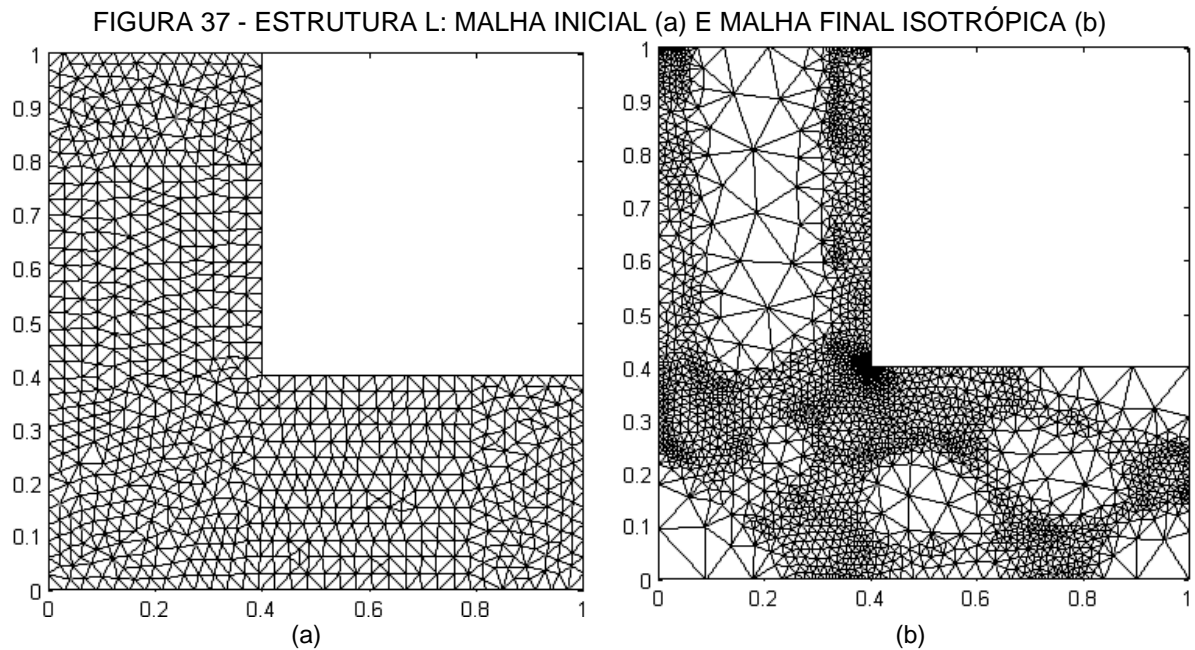
Este modelo trata de uma estrutura plana em formato de L, em EPT, engastada na parte superior e submetida a um carregamento vertical na região central da extremidade direita (ver FIGURA 36). Os parâmetros geométricos e materiais do modelo são:

$$\begin{array}{lll}
 E = 100,0 \text{ MPa} & \nu = 0,3 & L = 1,0 \text{ m} \\
 P = 1,0 \text{ kN} & r_m = 0,95 & r_p = 0,001 \text{ m}^2
 \end{array}$$

FIGURA 36 - ESTRUTURA EM FORMATO DE L ENGASTADA NA PARTE SUPERIOR



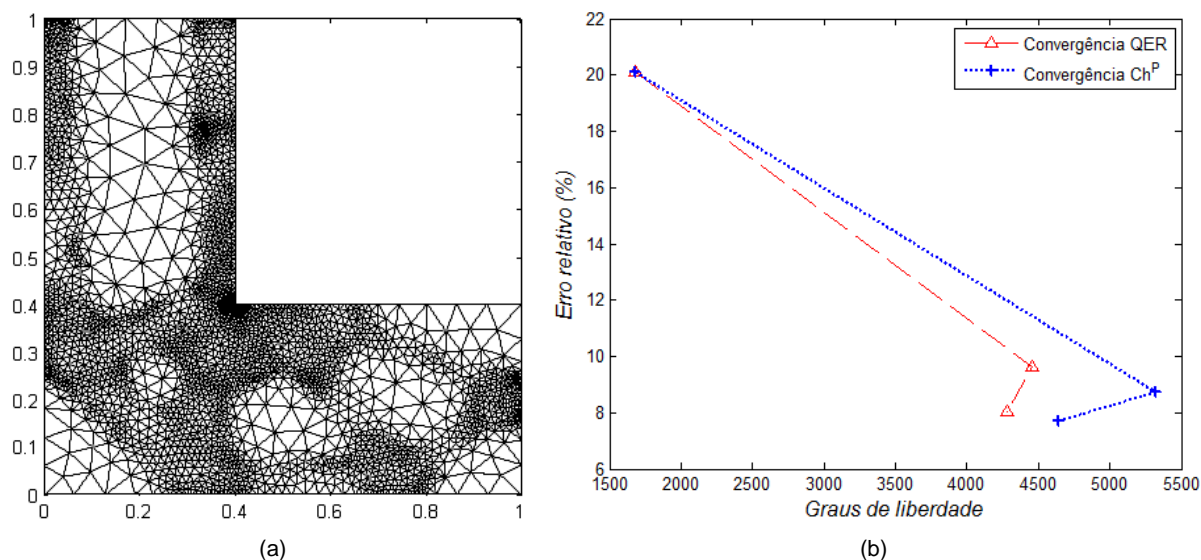
Os resultados podem ser visualizados nas figuras seguintes. Considera-se a restrição da massa em 0,32 e erro global prescrito de 7%. A FIGURA 37 apresenta a malha inicial quase uniforme com 1682 graus de liberdade, além da malha final com 4282 graus de liberdade. A FIGURA 38 apresenta a topologia final com 0,3219 de massa.



De maneira análoga aos outros resultados, aplicam-se também os conceitos da seção 3.5.1 e equação (3.63), para projeção Ch^P . Obteve-se a malha final com 4642 graus de liberdade, massa final de 0,3255 e erro global de 7,71% (FIGURA

39). Observa-se também que a taxa de convergência da projeção QER é superior àquela da projeção Ch^P , para este problema.

FIGURA 39 – ESTRUTURA L: MALHA FINAL DA PROJEÇÃO DE MALHA VIA Ch^P , (a) E COMPARAÇÃO ENTRE PROJEÇÕES (b)



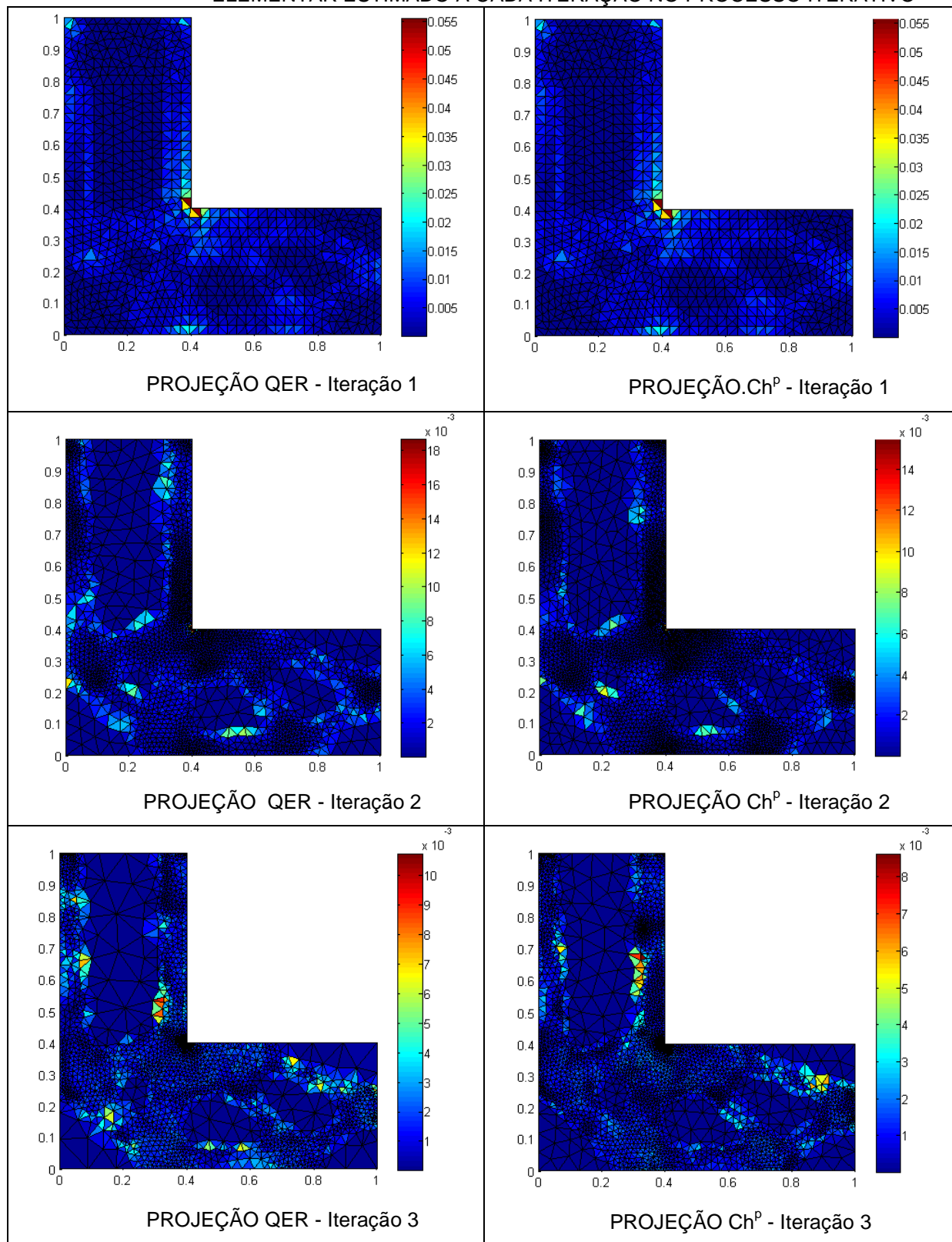
De forma idêntica ao problema de viga MBB e da placa com furo, apresenta-se o comportamento da malha para cada iteração, comparando-se o erro global estimado em cada projeção bem como as malhas para aplicação do MEF (TABELA 3).

TABELA 3 - ESTRUTURA L: INFORMAÇÃO DE CADA ITERAÇÃO NO PROCESSO ADAPTATIVO

ITERAÇÃO	PROJEÇÃO	Nº NÓS	Nº ELEMENTOS	GRAUS DE LIBERDADE	ERRO GLOBAL (%)
malha inicial	Iguais	841	1548	1682	20,11
Iteração 1	QER	2229	4231	4458	9,62
	Ch^P	2661	5058	5322	8,76
Iteração 2	QER	2141	4051	4282	8,02
	Ch^P	2321	4382	4642	7,71

Outras informações podem ser visualizadas no QUADRO 3, que apresenta o comportamento do erro elementar para cada projeção em cada iteração.

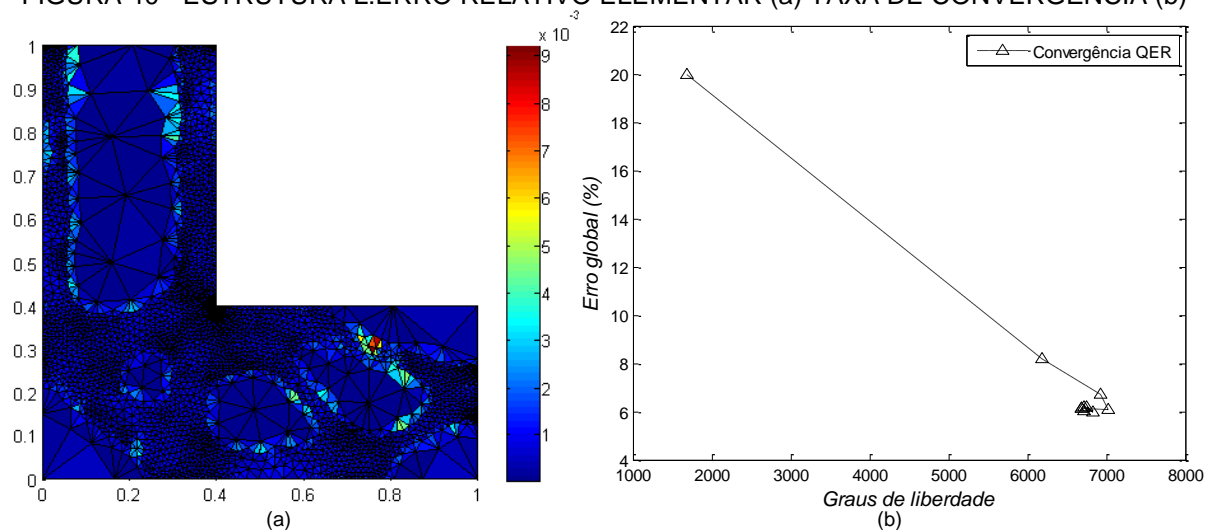
QUADRO 3 - ESTRUTURA L: USANDO AS PROJEÇÕES Ch^p E QER, COMPARAÇÃO DO ERRO ELEMENTAR ESTIMADO A CADA ITERAÇÃO NO PROCESSO ITERATIVO



Também se considerou neste problema um erro prescrito em 5% e as iterações foram ampliadas para 10. A FIGURA 40 apresenta 6,16% de erro global,

malha final com 6784 graus de liberdade e topologia final com 0,3229 de massa. Pode se observar que o método altera pouco tanto na questão do erro como na questão do número de graus de liberdade.

FIGURA 40 - ESTRUTURA L:ERRO RELATIVO ELEMENTAR (a) TAXA DE CONVERGÊNCIA (b)



7 CONCLUSÕES

Os métodos numéricos discutidos neste trabalho apresentam erros pelo simples fato de que suas soluções são aproximações da solução do problema e esses erros podem ter origem em várias fontes. Ou seja, por mais que o resultado final de um trabalho tenha boa exatidão, mesmo assim pode ser melhorado, principalmente neste caso. A seguir, algumas observações sobre os resultados.

A literatura apresenta várias abordagens na tentativa de mitigar os erros envolvendo aproximações numéricas pelo MEF. Este trabalho procura discutir essas questões. Especificamente para o MEF, algumas pesquisas tratam de estimativas de erros ao longo do domínio, aliadas a técnicas de refino de malhas adaptativas, as quais colaboram para o uso efetivo do método.

Vários trabalhos tratam de otimização em topologia, estimativa de erro, refino de malha do tipo isotrópica e adaptatividade. No entanto, trabalhos que utilizam malha isotrópica adaptativa, para encontrar a solução aproximada em problema de otimização estrutural contínua ainda são raros. Além disso, um método que considera a recuperação quadrática do erro para determinar o tamanho dos elementos da nova malha é completamente inovador. Neste trabalho, tem-se a proposta de uma abordagem de refino do tipo h-isotrópico em malha de elementos finitos, e sua aplicação em problemas de otimização estrutural contínua.

7.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para o refino adaptativo do tipo h-isotrópico, proposto neste trabalho, inicialmente faz-se a recuperação quadrática da função densidade do erro em energia. O termo quadrático é o fundamento na definição do tamanho padrão para cada elemento da malha.

Para comparação, a definição do tamanho elementar é feita de duas maneiras: a forma quadrática recuperada, que é a proposta deste trabalho, e o tamanho elementar definido por Zienkiewicz e Taylor (2000). Neste trabalho, o tamanho elementar é obtido pelo triângulo (aproximadamente equilátero) que pode ser inscrito na circunferência de área máxima, a qual apresenta o seu interior limitado pelo erro máximo admissível.

A validação da metodologia (realizada através de problemas escalares e vetoriais) permite afirmar que a malha se ajusta bem à variação da solução do problema. Observa-se que a metodologia se ajusta de maneira incomparável para cada tipo de carregamento. No geral, observando o índice de efetividade nos problemas de validação, verifica-se que está próximo do ideal, vide FIGURA 15 e FIGURA 20.

Na sequência, aplica-se a metodologia em questão a problemas de otimização estrutural em topologia contínua. Considera-se o problema de mínima flexibilidade com restrição em volume, usando refino h-adaptativo. Os resultados mostram que a metodologia se ajusta à solução do problema, de maneira que, as regiões em que os elementos da malha devem ser refinados e regiões em que devem ser aumentados, são detectadas pela metodologia. Observa-se, também, que esse processo é orientado pelos erros nos elementos, além do que, demonstram que o refinamento é executado de forma automática. Ademais, para cada estrutura, os resultados apresentam comportamento único na metodologia, ou seja, cada modelo é único; para tanto existe a necessidade de vários ajustes nas constantes de penalidades no MLA.

Pode-se afirmar, também, que é necessário restringir o limite de aumento e diminuição elementar, pois existe o risco de ter uma malha muito distorcida influenciando negativamente o resultado final.

Conclui-se que este trabalho pode ainda ser aperfeiçoado futuramente no sentido de inserir novos conceitos, outras abordagens, como por exemplo, o tamanho do elemento que leve em consideração as direções (anisotropia) e também inserir outros métodos de direção de busca no processo de otimização não linear, entre outros.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Conforme apresentado, o corrente trabalho atingiu os objetivos propostos. No entanto, seguem algumas sugestões para trabalhos futuros, visando o aperfeiçoamento dos conceitos discutidos aqui, bem como suas aplicações. Podem-se listar as seguintes sugestões, como:

- Aprofundamento matemático nas medidas propostas neste trabalho, como o tamanho elementar, incluir outros fatores, como a área do

elemento, outras medidas segundo a recuperação quadrática do gradiente e a interseção desse conjunto de medidas. Ver outras possibilidades no processo de otimização.

- Abordagem do refino usando malha adaptativa anisotrópica, levando em conta as direções de variação.
- Adaptação da estrutura computacional em uma linguagem de programação de forma que a torne mais barata computacionalmente.
- Aplicação de conceitos de malha anisotrópica em problemas onde as propriedades variam.

REFERÊNCIAS

- AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. **A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis**. New York: John Wiley & sons, 2000.
- AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A. Topological optimization of structures subject to Von Mises stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, p. 407 – 420, 2010.
- AMSTUTZ, S.; NOVOTNY, A. A.; SOUZA NETO, E. A. Topological derivative-based topology optimization of structures subject to Drucker–Prager stress constraints. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 233–236, p. 123–136, 2012.
- ANTON, H; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10.ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- APEL, T.; NICAISE, S.; SIRCH D. A posteriori error estimation of residual type for anisotropic diffusion–convection–reaction problems. **Journal of Computational and Applied Mathematics** v. 235 p. 2805 – 2820, 2011.
- ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design** – 3.ed. USA: Elsevier Academic Press, 2012.
- ARORA, J. S. **Optimization of Structural and Mechanical Systems**. Singapore: World Scientific, 2007.
- BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 15, n. 4, p. 736 - 754, 1978.
- BABUSKA, I.; STROUBOULIS, T.; UPADHYAY, C. S. A model study of the quality of a posteriori error estimators for linear elliptic problems. Error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 114, p. 307 - 378, 1994.
- BARLOW, J. Optimal stress locations in finite element models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 10, p. 243–251, 1976.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, v. 1, p. 193 – 202, 1989.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, p. 197 – 224, 1988.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**, v. 69, p. 635 – 654, 1999.

BENDSØE, M. P. **Optimization of Structural Topology, Shape, and Material**. Berlin: Springer, 1995.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization Theory, Methods and Applications**. 2 ed. Berlin: Springer, 2003.

BOURDIN, B.. Filters in topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, n. 9, p. 2143-2158, 2001.

BRANDÃO, D. N. **Um Refinamento h-Adaptativo de Malhas para o Método dos Elementos Finitos Utilizando uma Estrutura de Grafo**. 47 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal Fluminense. Programa de Pós-Graduação em Computação. Niterói, 2008.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering**. Berlin: Springer – Verlag, 1984.

BRUGGI, M.; TALIERCIO, A. Topology optimization of the fiber-reinforcement retrofitting existing structures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50, n. 12, p. 121–136, 2013.

BRUGGI, M.; DUYSINX, P. Topology optimization for minimum weight with compliance and stress constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 46, p. 369–384, 2012.

BRUGGI, M.; VERANI, M. A fully adaptive topology optimization algorithm with goal-oriented error control. **Computers and Structures**, v. 89 p. 1481 – 1493, 2011.

BUDD, C. J.; RUSSELL, R. D.; WALSH, E. The alignment properties of Monge - Ampere based mesh redistribution methods: I linear features. **Cornell University Library**. Disponível em: [http:// arXiv:1402.5453v1](http://arXiv:1402.5453v1) [math.NA] 21 Feb 2014. Acesso em: 21/08/2014.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. 9. ed. Boston: Cengage Learning, 2011.

C. LE, C. et al. Stress-based topology optimization for continua. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, p. 605 – 620, 2010.

CAI, S.; ZHANG, W. Stress constrained topology optimization with free-form design domains. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 289, p. 267 – 290, 2015.

CASTELLAZZI, G. **Verification in Computational Structural Mechanics: Recovery-Based a Posteriori Error Estimation**. Tese (Doutorado) – University of Bologna, 2007.

CASTELLAZZI, G.; MIRANDA, S.; UBERTINI, F. Adaptivity based on the recovery by compatibility in patches. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, p. 379 – 390, 2010

CÉA, J. et al. The shape and topological optimizations connection. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 188, p. 713 – 726, 2000.

CIARLET, P. G. **The Finite Element Method for Elliptic Problems**. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2002.

CHAPMAN, C.D.; JAKIELA, M. J. Genetic algorithm based structural topology design with compliance and topology simplification considerations. **ASME – Journal of Mechanical Design**, v. 118, p. 89 – 98, 1996.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5. Ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

CHENG, G. D.; GUO, X. ϵ -relaxed approach in structural topology optimization. **Structural Optimization**, v. 13, p. 258 - 266, 1997

CHOI, K. K. & KIM, N. H. **Structural Sensitivity Analysis and Optimization 1: Linear Systems**. New York: Springer, 2005.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An Introduction to Structural Optimization**. New York: Springer, 2009.

CLAUSEN, A.; AAGE, N.; SIGMUND, O. Topology optimization with flexible void area. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 50, p. 927 – 943, 2014.

COOK, R. D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4.ed. New York: John Wiley & sons, 2002.

COSTA Jr, J. C. A. **Otimização Topológica com Refinos *H*-adaptativos**. 141 f. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Florianópolis, 2003.

COUPEZ, T.; HACHEM, E. **Adaptive anisotropic meshing for incompressible Navier Stokes using a VMS solver with boundary layer**. V International Conference on Adaptive Modeling and Simulation – ADMOS, Paris, 2011.

D'AZEVEDO, E, F. SIMPSON, R. B. On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. **Numerische Mathematik**, v. 59, p. 321 – 348, 1991.

DEATON, J.D.; GRANDHI, R.V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 49, p. 1 – 38, 2014.

DUAN, X. B.; LI, F. F.; QIN, X. Q. Adaptive mesh method for topology optimization of fluid flow. **Applied Mathematics Letters**, v. 44, p. 40 – 44, 2015.

DUYSINX, P.; BENDSØE, M. P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 43, p. 1453 – 1478, 1998.

ESCHENAUER, H. A.; OLHOFF, N. Topology optimization of continuum structures: A review*. **Applied Mechanics Reviews**, v. 54, p. 331 – 390, 2001.

EMMENDOERFER, H. Jr.; FANCELLO, E. A. A level set approach for topology optimization with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 99, p. 129 – 156, 2014.

FANCELLO, E. A.; PEREIRA, J. T. Structural topology optimization considering material failure constraints and multiple load conditions. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 1, p. 3 - 24, 2003.

GAO, H. H. et al. An improved adaptive constraint aggregation for integrated layout and topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 289, p. 387 – 408, 2015.

GEA H. C. Topology optimization: a new microstructure-based design domain method. **Computers and Structures**, v. 61, p. 781–788, 1996.

GEORGE, P. L.; BOROUCAKI, H. **Delaunay Triangulation and Meshing Application to Finite Elements**. Paris: Editions Hermes, 1998.

GRÄTSCH, T.; BATHE, K. J. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. **Computer & Structures**, v. 83, p. 235 - 265, 2005.

GUEST, J. K.; SMITH GENUT, L. C. Reducing dimensionality in topology optimization using adaptive design variable fields. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, V. 81(8), p.1019 - 1045, 2010.

GUO, X.; ZHANG, W.; ZHONG, W. Explicit feature control in structural topology optimization via level set method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 272, p. 354 – 378, 2014.

HASSANI, B.; HINTON, E. **Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice and Software**. London: Springer, 1999.

HECHT. F. New development in FreeFem++. **Journal of Numerical Mathematics**, v 20, p. 251-265, 2012.

HECHT. F. **BAMG: Bidimensional Anisotropic Mesh Generator**. Version v1.00, INRIA/Université de Jussieu, decembre 2006.

HOLMBERG, E.; TORSTENFELT, B.; KLARBRING, A. Stress constrained topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v 48, p. 33 – 47, 2013.

HOWARD, A.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

HUANG, Y.; YANG, W.; YI, N. Superconvergence analysis for the explicit polynomial recovery method. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 265, p. 187–198, 2014.

HUANG, X.; XIE, Y. M. Evolutionary topology optimization of continuum structures with an additional displacement constraint. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 40, p. 409–416, 2010.

HUANG, W.; KAMENSKI, L.; LANG, J. A new anisotropic mesh adaptation method based upon hierarchical a posteriori error estimates. **Journal of Computational Physics**, v. 229 p. 2179–2198, 2010.

HUANG, W. KAMENSKI, L.; LANG, J. Adaptive finite elements with anisotropic meshes. **Department of Mathematics, Technische Universität Darmstadt**. Darmstadt, 26 Apr 2012. Disponível em: <http://arxiv.org/pdf/1201.4090.pdf>. Acesso em: 08/03/2014.

KAMENSKI, L.; HUANG, W. How a nonconvergent recovered Hessian works in mesh adaptation. **Department of Mathematics, Technische Universität Darmstadt**. Darmstadt, 2 May 2013. Disponível em: <http://arxiv.org/pdf/1211.2877.pdf>. Acesso em: 08/03/2014.

KHENNANE, A. **Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and Abaqus**. Boca Raton, CRC Press: Taylor e Francis Group, 2013.

KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: John Wiley & sons, 1978.

KUNERT, G.; NICAISE S. Zienkiewicz-zhu error estimators on anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes. **ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis**, v. 6, p. 1013 – 1043, 2003.

LAKHANY, A. M.; WHITEMAN, J. R. Superconvergent recovery based error estimators. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 50, p. 97 - 114, 1999.

LE, C. *et al.* Stress-based topology optimization for continua. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 41, p. 605 – 620, 2010.

LINS, R. M. **Estimador de Erro a Posteriori Baseado em Recuperação do Gradiente para o Método dos Elementos Finitos Generalizados**. 94 f. Dissertação Mestrado-Programa de Pós-Graduação e Área de Concentração em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos, 2011.

LINS, S. O. **Otimização de Forma Aplicando B-splines sob Critério Integral de Tensões**. 140 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Natal, 2009.

LIU, G.R.; GU, Y.T. **An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming**. Dordrecht,: Springer, 2005.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. 3 ed. New York: Springer, 2008.

LUO, Y.; WANG, M. Y.; KANG, Z. An enhanced aggregation method for topology optimization with local stress constraints. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 254, n. 5, p. 31- 41, 2013.

LUO, Y.; ZHOU, M.; WANG, M. Y.; DENG, Z. Reliability based topology optimization for continuum structures with local failure constraints. **Computers and Structures** v. 143, p. 73 – 84, 2014.

MAUTE, K.; RAMM, E. Adaptive topology optimization. **Structural Optimization**, v.10(2), p.100 - 112, 1995.

MICHELETTI, S.; PEROTTO, S. Reability and efficiency of na anisotropic Zienkiewicz-Zhu error estimator. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 799- 835, 2006.

MITCHELL, W. F. A collection of 2D elliptic problems for testing adaptive grid refinement algorithms. **Applied Mathematics and Computation**, v. 220, p. 350-364, 2013.

NOVOTNY, A. A. et al. Topological sensitivity analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, p. 803 - 829, 2003.

NOVOTNY, A. A. **Análise de Sensibilidade Topológica**. 136 f. Tese (doutorado) – Laboratório Nacional de Computação Científica. Petrópolis, 2003.

NOVOTNY, A. A.; FANCELLO, E. A. Um refinamento h, p e hp adaptativo na análise de flexão de placas semi-espessas. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 14, p. 25–48, 1998.

NOVOTNY, A. A.; SOKOŁOWSKI, J. **Topological Derivatives in Shape optimization**. Berlin: Springer, 2013.

NOWAK, M. Structural optimization system based on trabecular bone surface adaptation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 32, p. 241–249, 2006.

ODEN, J. T.; REDDY, J. N. **An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements**. New York: Dover, 2011.

OH, H.S; BATRA, R. C. Application of Zienkiewicz-Zhu's error estimate with superconvergent patch recovery to hierarchical p -refinement. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 31 p. 273 - 280, 1999.

OHSAKI, M. **Optimization of Finite Dimensional Structures**. New York: CRC Press, 2011.

OLIVEIRA NETO, J. A. **Otimização Topológica de Estruturas Termoelásticas**. 122 f. Dissertação Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Natal, 2011.

ONÃTE, E.; BUGEDA, G. A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis. **Engineering Computations**, v. 10, p. 307–321, 1993.

PERSSON, P. O. **Mesh Generation for Implicit Geometries**. 126 f. Thesis Massachusetts Institute of Technology. Massachusetts, 2005.

PEREIRA, J. T. **Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrições sobre o Critério de Falha Material**. 232 f. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Florianópolis, 2001.

PEREIRA, J. T.; FANCELLO, E. A.; BARCELLOS, C. S. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, p.50 – 66, 2004.

PICASSO, M. Adaptive finite elements with large aspect ratio based on an anisotropic error estimator involving first order derivatives. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 14 - 23, 2006.

PONTES FILHO, I. D. S. D.; BORGES, L. A.; ZOUAIN, N. An adaptive approach to limit analysis on soil mechanics. **Computer Methods and Advances in Geomechanics**. ISBM 90 5809 183 X, Balkema, Rotterdam, 2001. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=3M9D8xAN2HEC&pg=PA117&dq=an+adaptive+approach+to+limit+analysis+on+soil+mechanics&hl=en&sa=X&ved=0CBsQ6AEwAGoVChMIIZPZze2jyAIVBYWQCh3EDQM8#v=onepage&q=an%20adaptive%20approach%20to%20limit%20analysis%20on%20soil%20mechanics&f=false>. Acesso em: 08/03/2014.

QIAN, X. Topology optimization in B-spline space. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 265, n. 2, p. 15 – 35, 2013.

RACHOWICZ, W. An h-adaptive finite element method with highly stretched elements for compressible Navier-Stokes equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 189, p. 1141 - 1160, 2000.

RAO, S. S. **Engineering Optimization: Theory and Practice**. 3 ed. New York: John Wiley & Sons, 1996.

REDDY, B. D. **Functional Analysis and Boundary-Value Problems: an Introductory Treatment**. New York: John Wiley & Sons, 1986.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3. ed. New York: Mc Graw Hill, 2006.

RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. **Otimização Contínua: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

RONG, J. H.; LIANG, Q. Q. A level set method for topology optimization of continuum structures with bounded design domains. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, p. 1447 - 1465, 2008.

ROUX, E.; BERNACKI, M.; BOUCHARD, P.O. A level-set and anisotropic adaptive remeshing strategy for the modeling of void growth under large plastic strain. **Computational Materials Science**, v. 68, p. 32 - 46, 2013.

ROZVANY, G. I. N. A critical review of established methods of structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 37, p.217 – 237, 2009.

SETHIAN, J.A.; SHAN, Y. Solving partial differential equations on irregular domains with moving interfaces, with applications to superconformal electrodeposition in semiconductor manufacturing. **Journal of Computational Physics**. v. 227, p. 6411 – 6477, 2008.

SEUNGMIN, J.; SUNGHOON, L.; SEUNGJAE, M. Level-set-based topology optimization using remeshing techniques for magnetic actuator design. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 52(3), p.1 - 4, 2016.

SIGMUND, O.; MAUTE, K. Topology optimization approaches. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, p.1031 – 1055, 2013.

SILVA, J. D. **Análise de Estimadores de Erro a Posteriori Aplicados ao Método dos Elementos Finitos Utilizando Refino H-adaptativo**. 150 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Curitiba, 2015.

SILVA, P. S. **Estruturas Termoelásticas sob Otimização Topológica e H-adaptatividade**. 122 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Natal, 2007.

SOKOŁOWSKI, J.; ZOCHOWSKI, A. On the topological derivative in shape optimization. **SIAM Journal on Control and Optimization** v. 37(4), p. 1251–1272, 1999.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 2 ed. São Paulo: McGraw_hill, 1987.

SUN, W.; YUAN, Y. X. **Optimization Theory and Methods: nonlinear programming**. New York: Springer, 2006.

SZABÓ, B.; BABUSKA, I. **Finite Element Analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1991.

TAKEZAWA, A.; NISHIWAKI, S.; KITAMURA, M. Shape and topology optimization based on the phase field method and sensitivity analysis. **Journal of Computational Physics**, v. 229, Issue 7, n. 18, p. 2697 – 2718, 2010.

VALLET, M. G.; et al.. Numerical comparison of some Hessian recovery techniques. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v. 72, p. 987–1007, 2007.

VAN DIJK, N.P. et. al. Level-set methods for structural topology optimization: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, p. 437 – 472, 2013.

XIANBAO, D.; FEIFEI, L.; XINQIANG, Q. Topology optimization of incompressible Navier–Stokes problem by level set based adaptive mesh method. **Computers and Mathematics with Applications**, doi:10.1016/j.camwa.2016.06.034.

XIE, Y.M.; STEVEN, G. P. Evolutionary structural optimization for dynamic problems. **Computers and Structures**, v. 58, p. 1067 – 1073, 1996.

XIE H.; YIN, X. New metric tensors for anisotropic mesh generation. **LSEC, ICMSEC, Academy of Mathematics and Systems Science, CAS**. Beijing, 2 junho 2011. Disponível em: http://www.researchgate.net/publication/51893165_New_metric_tensors_for_anisotropic_mesh_generation. Acesso em: 08/03/2014.

YI, G. L.; SUI, Y. K. An adaptive approach to adjust constraint bounds and its application in structural topology optimization. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v.169(2), p 656 – 670, 2016.

WANG, Y.; KANG, Z.; HE, Q. Adaptive topology optimization with independent error control for separated displacement and density fields. **Computers and Structures**, v. 135, p. 50–61, 2014.

WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, p. 227 - 246, 2003.

ZHU, J. Z.; ZIENKIEWICZ, O. C.; Adaptive techniques in the finite element method. **Communications in Applied Numerical Methods**, v. 4, p. 197 – 204, 1988.

ZIENKIEWICZ, O. C. The background of error estimation and adaptivity in finite element computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 207 – 213, 2006.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR; R. L. **The Finite Element Method. vol 1: The Basis**. 5 ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering** v. 24, p. 337 – 357, 1987.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, p. 1331 – 1364, 1992a.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, p. 1365 – 1382, 1992b.

ZHANG, B.; CHEN, S.; ZHAO, J. A posteriori error estimation based on conservative flux reconstruction for nonconforming finite element approximations to a singularly perturbed reaction – diffusion problem on anisotropic meshes. **Applied Mathematics and Computation**, v. 232 p. 1062 – 1075, 2014.